研究班番号【 71 】

n個の無理数を足したものは有理数か

数学班:坂口　優希、森本　裕仁

Abstract

We were interested in the sum of irrational numbers. So, I tried to prove that a number is irrational when the number of √s is increased to n. First, we tried to prove it by making the number inside the √ a number that cannot be divided by any square number. we increased the number of √s. And , we squared that equation many times. However, we weren't able to prove it this way. Accordingly, we made the number inside the √ a number that considers the combinations that can be made with the number 1 and a prime number. We attempted to use a different method that enabled us to complete the proof to n. Therefore, in this research, we were able to show a new method of proof for proofs with a large number of √s.

要約

私達は、無理数の和について興味を持ち、2以上の自然数nに対して

$$\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}+\cdots+\sqrt{n}$$

が無理数であることを証明しようとした。まず、√の中の数をどんな平方数でも割り切れない数とし、√の個数を増やし、平方することで証明しようとした。しかし、この方法では証明することができず、他の方法を使うことで、n個までの証明を完了することができた。よって、この研究では、√の個数が多い場合について、新たな証明方法を示すことができた。

1. はじめに

これまでに、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$が無理数であることを証明せよという問題を解いたことがあるだろう。この証明は、√の個数を増やしていくと、より多くの工程が必要である。そのため、√の個数を増やしていき、n個にしたときの証明方法について興味を持ち、調べることにした。

2. 研究手法

√の個数を1個、2個.....と増やして数学的帰納法を利用し、証明しようとした。

≪方法1≫　平方して√の個数を少なくしていく。

①√の個数をn個として考えた。ここで√の中身は、どんな平方数でも割り切れない自然数とする。

②√の個数をn=1,n=2,n=3と増やしていき、規則性を見つけようとした。

③背理法を用いて矛盾を指摘し、証明する。

≪方法2≫　参考文献を利用して証明する。

①素数の個数をnとし、1とその素数でできる組み合わせをすべて考え、そのできた数の√をとる。

②素数の個数をn=1,n=2,n=3と増やしていき、規則性を見つけようとした。

④背理法を用いて矛盾を指摘し、証明する

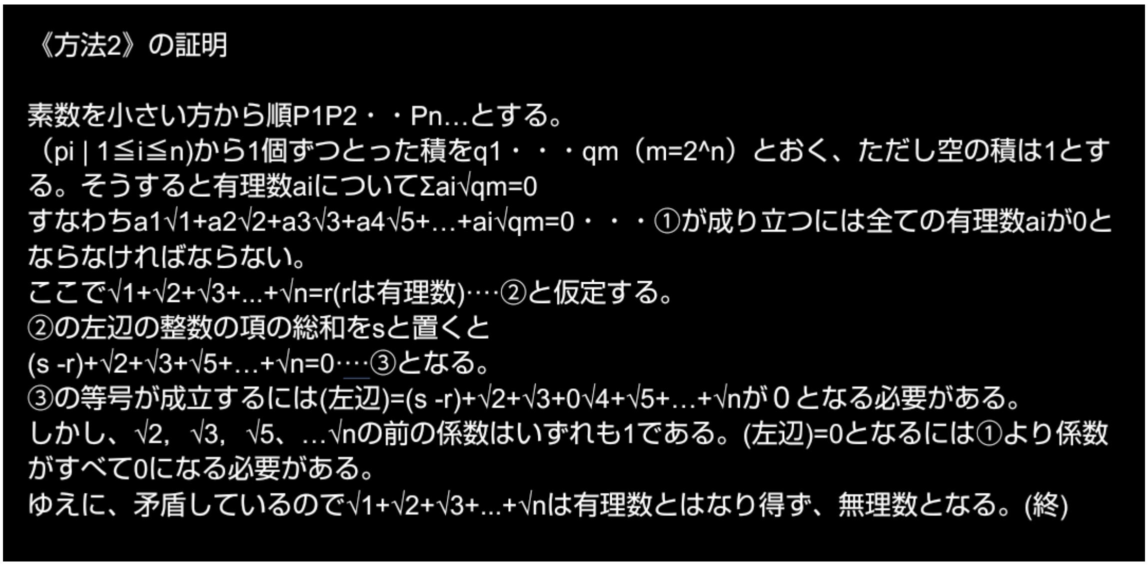
3. 結果

≪方法1≫

n=1,n=2,n=3のときまでは、順調に行ったが、n=4の証明中、何度平方しても√の個数が減らなくなり、数学的帰納法を使っての証明が進まなくなった。

≪方法2≫

n=1,n=2,n=3ともに、順調に証明することができ、n個のときまで証明することができた。



⇧上図は《方法2》のn個までの証明である

4. 考察

≪方法1≫は、n=1,n=2のような数が少ないものまでは証明可能だが、√の個数が多くなってしまうと、実用的ではないと考えられる。≪方法 2 ≫は、n=1,n=2のように√の個数に関係なく順調に証明することができるため、√の個数が増えたとしても証明することが可能であると考えられる。また、それ以外に√の前の係数の数字が大きい場合も、≪方法 2 ≫の証明方法が有効であると考える。今後については、今回私達が行った方法以外で証明する方法があるかを確かめたい。

5. 結論

√2+√3の問題と同じような解き方は、n個まで通用するわけでなく、nの個数が少ないときに使用できる証明方法であるとわかった。

6. 参考文献ならびに参考Webページ

木原章一（数学セミナー1981年10月号）『√qが有理数体上独立なこと』