研究班番号【 75 】

2つの封筒のパラドックス

数学班：松井　颯太朗、眞浦　幸也、森下　大祐、川渕　伶生那

Abstract

We researched “The Envelope Paradox”. We concluded that the cause of the paradox is thinking about amounts that shouldn’t exist. To address this, we set up a system where a fee is charged when changing the envelope and used programming to investigate the conditions under which the paradox is resolved. Additionally, by focusing on the number of times the envelope is changed, we were able to generalize the expected value of the envelope.

要約

私たちは封筒のパラドックスについて調べた。私たちはこのパラドックスの原因は本来存在しないはずの金額を考えてしまっているためだとした。そのため封筒を変える際に料金が発生するように設定しプログラミングを用いてこのパラドックスが解消する条件について調べた。また、この封筒の期待値を封筒を変える回数に着目することで一般化することができた。

1.はじめに

私たちは2つの封筒問題のいくつかの条件を変更し、パラドックスの解消を目指す。

2.問題の概要

2つの封筒があり、一方の封筒にはある金額が入っている。もう一方の封筒には他方の封の2倍の金額が入っている。いずれかの中身の金額を確認し、もう一方の封筒の期待値を求めると必ず確認した金額の値よりも大きくなる。つまり、この場合どちらの封筒を選んでも変えたほうが得となるというのがパラドックスである。（封筒の個数が3つ、4つ、…、のときもこのパラドックスが生じる。）

3.研究手法

私たちは、このパラドックスの原因は本来なら存在しないはずの金額も含めて計算しているためだと考えた。例えば、2つの封筒それぞれに500円または1000円が入っているとする1000円の封筒を引いたとき、もう一方の封筒の金額の期待値は$2000\times\frac{1}{2}+500\times\frac{1}{2}=1250$となり、変えたほうが得ということになるが、この場合、本来2000円は存在しないため期待値が大きくなってしまったと考えた。以下のような条件で研究する。

≪条件≫

Ⅰ．封筒の個数を3つとする。

→封筒が2つのとき、1回封筒を変えただけで金額の組み合わせがわかってしまい、施行回数が少なくなってしまう。そこで、今回は封筒を3つとして考える。

Ⅱ．封筒に入っている金額の組み合わせは、「x 、 2x 、 4x」とする。(このときxは偶数)

→金額を固定することで、本来存在する金額のみを考えることができるため。

Ⅲ.封筒を変えるとき、変える前の封筒に入っている金額のa倍（0<a<1）の金額を支払う。

→何回でも変えられるようにすると、最大の金額を得られるまで変えたらいいとなってしまうので変えるたび一定の割合支払うようにする。また封筒を3つにしたときそれぞれの封筒の増加量に対して等しい

割合の金額を支払うようにするため。

Ⅳ.試行者が「4x」が最大であることがわかったうえで「4x」を引いたとき試行を終了する。
◎試行者が「4x」が最大であるとわかる条件
➩「x」、「4x」を最低1回ずつ引く。

≪実験方法≫
金額の組み合わせ、aの値を入力すると試行者が得ることができる平均の金額と試行者が封筒交換した平均の回数がわかるプログラムを作成し、いろいろ調べる。

```
import random
a = 0   cnt = -1  num = 1
d = 0  f = 0  g = 0  i = 0
j=0  t=0  ave=0  sum=0  k=0  kk=0
x=int(input("最小の金額"))
m=int(input("何%引く"))
t=int(input("ゲーム回数"))

while(j!=t):
    j=j+1
    while(a != 3 or num % 6 !=
0):
            a =
random.randint(1,3)
            if(a!=i):
                g = g + m/100*d
                 cnt = cnt + 1
                 num = num * a
                if(a == 1):
                    d = 2*x
                    .
                    .
                    .
                    .
                else:
                    if(a == 2):
                        d = x
                    else:
                        d = 4*x
                i=a
    f=d-g
    g=0
    k=k+cnt
    cnt=-1
    num=1
    d=0
    i=0
    sum=sum+f

ave=sum/j
kk=k/j

print("平均の金額",ave)
print("平均の変えた回数",kk)
```

↑作成したプログラム
≪実験1≫
封筒を変えたときと変えなかったときの金額の期待値が等しくなるaを探す。
≪実験2≫
試行者が試行を終了するまでに封筒を交換するおおまかな回数を調べる。

3.結果

≪実験1≫
a＝0.25にしたとき、封筒を変えたときと変えなかったときの期待値がともに2333.33…となり、限りなく等しくなった。

≪実験2≫
プログラミングの結果より施行者が封筒の金額の組み合わせが分かってかつ、最大値を引くまでの平均の回数は3.33…回であるので今回は4回目までの期待値を求めれば十分であるとして計算した。すると、試行者が得られる金額の期待値は、変える回数が1回のとき$\frac{(14-14a)}{6}$x、2回のとき$\frac{(25-46a)}{10}$x、3回のとき$\frac{(36-96a)}{14}$x、4回のとき$\frac{(47-164a)}{18}$xとなった。

4.結論

実験1より、aの値を0.25としたとき、このパラドックスを解消することができた。また実験2より、今回の条件下では、得られる金額の期待値は$\frac{4811}{2016}$x−$\frac{21911}{10080}$axとなり、期待値を一般化することに成功した。

5.考察

一回の交換で支払う金額の期待値は、
$1000a\times\frac{1}{3}+2000a\times\frac{1}{3}+4000a\times\frac{1}{3}=\frac{a}{3}(1000+2000+4000)$ =2333.333・・・×aとなる。今回の条件下では4回交換するので、2333.333・・・×a×4。ここに、a=0.25を代入すると支払う金額の期待値は2333.33・・・となり、最初の封筒に入っていた金額の期待値と一致するので、そこに関係性があるのではないかと考えた。

6.今後の展望

今回の実験では、特定の条件下での期待値を一般化させることはできたものの、封筒に入っている金額が奇数か偶数かなど、まだ全事象を試せたわけではないので、他の条件でも研究していきたい。