研究班番号【70】

コラッツ操作における連続する2整数の総試行回数の関係性

数学班:内田　莉央

Abstract

We studied the Kolatz operation. When k is an odd number and n is a non-negative integer, the natural number is expressed as k・2^n. We studied the relationship between the total number of trials of two consecutive integers, which are the number which makes one attempt in the reverse direction from k・2^n (α), and the number minus one (α-1). We derived the conditions of k,n for α to be odd. I made a distinction between respective cases by the value of n. We studied the relationship between the total number of trials of two consecutive integers and the nature of α-1.

要約

コラッツ操作に関する研究を行った。kを奇数、nを非負整数とし、自然数を$k\cdot 2^n$で表し、逆1回試行した数(α)と、その数から1引いた数(α−1)の連続する2整数の総試行回数の関係性について調べた。αが奇数になるためのk,nの条件を導き、それぞれの条件においてnの値で場合分けを行い、連続する2整数の総試行回数の関係性と、α−1の性質を調べた。

1. はじめに

一人班なのでなにを研究しても良かったのだが、せっかくなら自分の好きなことに関する研究をしようと思い、コラッツ予想に関する研究を行うことにした。コラッツ予想とは、任意の自然数に対して、偶数なら2で割る、奇数なら3倍して1を足す、という操作(コラッツ操作)を繰り返すと、有限回の試行で必ず1にたどり着く、という予想である。しかし、コラッツ予想を解決するのにはあまりに時間が足りないので、別の視点から考えてみることにした。まず、コラッツ予想に関する様々なプログラミング(任意の数から始めて1にたどり着くまでの総試行や、総試行回数のみをまとめたもの、偶数、奇数それぞれの試行回数や、疑似コラッツ操作)を作成し、どのような規則があるかを探し出した。その結果、連続する2整数において、初めて1にたどり着くまでの回数が等しいものが多く見られた。よって、それらの関係性を求めることをテーマとした。

2. 研究手法

kを奇数、nを非負整数とすると、自然数は$k\cdot 2^n$と表せる。

①$k\cdot 2^n$を逆1回試行した数を求め、その数をαとし、αが奇数である条件を求める。

②αとα−1の総試行回数が、どのような条件で等しくなるか、または異なるのかを調べる。

3. 結果

①$\alpha=(k\cdot 2^n-1)/3$となった。αは次の試行で3倍して1足すため、奇数である必要がある。$\alpha=2m-1$とすると、$n\geqq 1$が導かれ、$(k,n)=(6p-1,2q-1),(6p-5,2q)$のとき、αは奇数という条件を満たす。

②αとα−1の総試行回数を比較したとき、表[1)]の場合分けを行い、それぞれ結果が得られた。

表1)

		連続する2整数の総試行回数の関係性
p≠1	n≧3	等しい
	n=2	必ずしも等しいとは限らない
	n=1	必ずしも等しいとは限らない
p=1	n=3,n≧5	等しい
	n=4	等しくない
	n=2	等しい
	n=1	等しくない

4. 考察

表1)で得られた結果のそれぞれの場合でα−1の値に注目すると、表2)のことが考えられる。

表2)

		連続する2整数の総試行回数の関係性	α-1の性質
p≠1	n≧3	等しい	4の倍数かつ8の倍数でない
	n=2	必ずしも等しいとは限らない	8の倍数
	n=1	必ずしも等しいとは限らない	2の倍数かつ4の倍数でない
p=1	n=3,n≧5	等しい	4の倍数かつ8の倍数でない
	n=4	等しくない	奇数の試行回数が0回
	n=2	等しい	αとα-1の総試行回数がともに0回
	n=1	等しくない	奇数の試行回数が0回

5. 結論

表2)より、α−1が4の倍数かつ8の倍数でないとき、連続する2整数の総試行回数が等しくなると考えられる。つまり、3以上の奇数tを用いて、α−1=4tと表されるとき、連続する2整数の総試行回数が等しくなる。これの逆は成り立たない。反例はα=15である。したがって、α−1=4tと表されることは、連続する2整数の総試行回数が等しくなるための必要条件である。今後の展望としては、コラッツ予想は奇数の場合に3倍して1を足すが、この3n+1型以外に、5n+1型や、3n−1型などの疑似コラッツ予想についても同様の研究を行いたい。

6. 参考文献ならびに参考Webページ

なし