

面積が一定の図形のうち、周の長さが最小になる図形

数学班: 西濃 朔、楠 千嘉、中道 翔

Abstract

We studied among the shapes with a certain area, what shapes have the shortest circumference length. As a result, by using the fact that among the shapes with a certain circumference length, the shape that has the smallest area is the circle, we found that the answer of this question is also circle.

要約

私たちは面積が一定のとき、周の長さが最小になる図形が何なのかについて研究した。結果、周の長さが一定のとき、面積を最大にする図形は円であるという事実を用いて、この問いの答えは円であるということがわかった。

1. はじめに

「周の長さが一定のとき、面積を最大にする図形はなにか？」という既存の問題(等周問題)がある。私たちはこの問題から着想を得て、この問いをたてた。

2. 得られた結果

- ① 三角形のうち周の長さが最小になるものは、正三角形であることを証明した。
- ② n 角形のうち周の長さが最小になるものの条件について考察した。
- ③ すべての図形のうち周の長さが最小になるものについて等周問題の解答を用いて証明した。

3. 証明および考察

① 三角形のうち周の長さが最小になるものは、正三角形である

(証明) 面積が1の三角形の三辺の長さをそれぞれ a, b, c , 2 辺 ab のなす角を θ とすると、

$$\frac{1}{2} ab \sin \theta = 1$$

であり、 $a + b = l$ として上の式を変形すると、次式を得る。

$$ab = \frac{l^2 - c^2}{4} + \frac{4}{l^2 - c^2}$$

ここで a, b を解に持つ二次方程式 $X^2 - lX + ab = 0$ が正の実数解を持つための条件は

$$D \geq 0 \text{ すなわち } l^2 - 4ab = l^2 - 4 \left(\frac{l^2 - c^2}{4} + \frac{4}{l^2 - c^2} \right) \geq 0$$

よって

$$a + b + c \geq \sqrt{c^2 + \frac{16}{c^2}} + c$$

これは $a = b$ のとき等号が成立し、右辺が最小値をとる条件から、

$$a = b = c = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

のとき、すなわち正三角形のとき、周の長さが最小になることが分かる。

②n角形のうち周の長さが最小になるものの条件

面積が一定の図形のうち、周の長さが最小になる図形を、以下では「最小化図形」とよぶ。n角形のうち、最小化図形が満たす条件を考える。条件を考えるにあたって、次の事実を使用する。

【面積 S 、周の長さ L の図形を、面積が1になるよう相似拡大・縮小すると、周の長さは、 L/\sqrt{S} になる】…[1]

(i)凸多角形と凹多角形について考える。

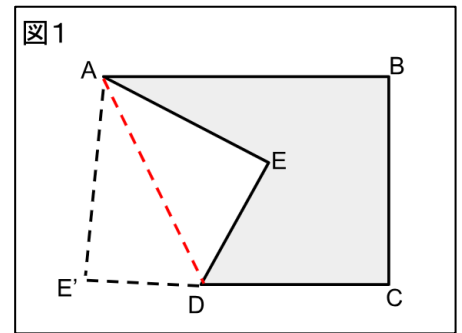
凹んでいる五角形 $ABCDE$ を考え、 AD が五角形内部にないとする。このとき、 AD に関して E と対照な点を E' とする。五角形 $ABCDE$ と五角形 $ABCDE'$ について、面積と周の長さを前者、後者それぞれについて、 S, L, S', L' とおく。[1]より、面積が1になるように相似拡大・縮小をしたあとの周の長さは、それぞれ

$$\frac{L}{\sqrt{S}}, \frac{L'}{\sqrt{S'}}$$

である。五角形 $ABCDE$ と五角形 $ABCDE'$ について、周の長さはどちらも等しく $S = S'$ 、面積は後者のほうが大きいので、

$$\frac{L}{\sqrt{S}} > \frac{L'}{\sqrt{S'}}$$

が成立し、これは任意の図形についても言え、凹んでいる部分がある図形があれば、それは最小化図形ではない事がわかる。



(ii)辺の長さについて考える

ある多角形 P の隣り合う三点で $\triangle ABC$ を作る(図2)。Bを通りACに平行な直線を M とする。 $AB \neq BC$ ならば、 $\triangle ABC$ についてACを固定し、Bを M 上で移動させたとき、①で証明したことから $AB' + B'C$ が最小となる、Bと異なる点 B' が M 上に存在し、 $AB' = B'C$ である。

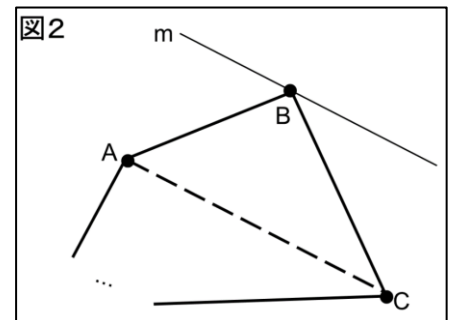
このとき、元の図形と移動後の図形を比較すると、面積は等しく、周の長さは移動後の図形の方が短い。よって、

$$AB \neq BC \Rightarrow P \text{ は最小化図形でない}$$

が P の任意の隣り合う辺 AB, BC についていえるので、対偶をとって、

$$P \text{ が最小化図形である} \Rightarrow \text{すべての辺の長さは等しい}$$

とわかる。これらのことから、最小化図形は、すべての辺が等しい凸図形である事がわかる。また、これらの事実を用いると、四角形の最小化図形を考える時、ひし形の最小化図形を考えればよく、そこから四角形の最小化図形は正方形であることがわかった。



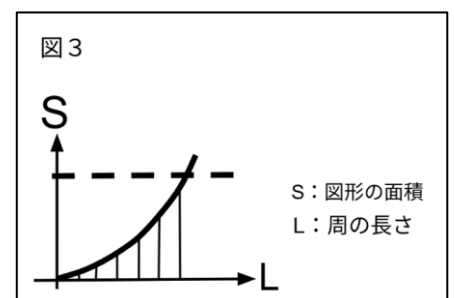
③すべての図形のうち周の長さが最小になるもの

前記の等周問題の答えから、周の長さが一定のとき、面積を最大にする図形は円である。図形の周の長さを L 、面積を S とおいた $L - S$ 平面を考える。等周問題から、 L 座標が一定のとき、 S 座標の取りうる値の最大値を満たす図形は円である。円の半径 r を媒介変数として用いると、

$$L = 2\pi r, S = \pi r^2 \quad \therefore S = \frac{L^2}{4\pi}$$

つまり、図形の (L, S) の取りうる範囲は、放物線 $S = L^2/4\pi$ よりも下の部分である。

S 座標が同じ図形のうち、最も L 座標が小さい図形、つまり面積が一定のときに周の長さを最小化する図形は、放物線 $S = L^2/4\pi$ 上にある図形、すなわち円であることがわかった。



4. 考察

③での証明方法は、他の、図形の面積と周の長さに関する命題について、ある命題が真ならば、その命題文の面積と周の長さを入れ替えた命題の証明に使える可能性があると考えられる。更には、一般に2つの変量に関する命題についても同じことがいえる可能性があると考えられる。

5. 結論

私達は面積一定の図形のうち、周の長さを最小にする図形の形について考察してきた。関数的な処理の結果、面積が一定の三角形のうち、周の長さが最小になるものは正三角形であることがわかった。また、図形的な考察により、面積が一定の n 角形のうち、周の長さが最小になる図形はすべての辺の長さが等しい凸多角形であることがわかった。また、これを用いて面積が一定の四角形のうち、周の長さが最小になるのは、正方形であることがわかった。

また、周の長さが一定で面積が最大になる図形は円であるという事実を用いると、面積が一定で周の長さが最小になる図形も円であるという結論が得られた。その証明に用いた手法は、周の長さや面積に関する命題について、その命題が真ならば、面積と周の長さを入れ替えた命題を証明するときにも使える可能性があると考えられる。

この研究では、最小化図形の条件を、凸多角形である、と、すべての辺の長さが等しい、という2つの条件のみしか発見できていない。さらなる条件、例えば円に内接すること、や、すべての内角が等しいこと、などを証明されることを望む。

6. 参考文献ならびに参考 Web ページ

なし