

期待値が無限！？～サンクトペテルブルクのパラドックス～

数学班：崔多恵、野田 椿

Abstract

The purpose of this study is to prove the relationship between the number of times and size of the prize money to challenge a game in the paradox of Sankutopeteruburuku. Truly, We understood that the number of times and size of the prize money to challenge a game did not have the relations. However size of the prize money we appeared in 1 game is grew big whenever we increased the number of times. From this, We turned that in order to make this paradox work, it is necessary to assume the impossible situation to challenge an infinite situation.

要約

本研究の目的は、サンクトペテルブルクのパラドックスにおいてゲームに挑戦する回数と賞金の大きさの関係を明らかにすることである。実際、実験によってゲームに挑戦する回数と賞金の大きさに相関は見られなかった。しかし1ゲーム内で出た最大の賞金の値は回数を増やしていくごとに大きくなっていった。このことからこのパラドックスを成立させるためには、 ∞ 回挑戦するという非現実的な状況を仮定する必要があるということがわかった。

1. はじめに

サンクトペテルブルクのパラドックスとは裏表が同確率で出るコインを表が出るまで投げ続け、裏が n 回連続で出ると 2^n 円の賞金が得られるゲームであり、期待値は ∞ になる。

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k 2^{k-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdots = \infty$$

しかし、数学者のウィリアム・フェラーによるとこのゲームの期待値が ∞ となるのはゲームへの挑戦回数が ∞ であることが前提だとされていた。その為、我々はゲームへの挑戦回数が多ければ多いほど賞金に近づくのでは無いかという仮説を立て研究を進めた。

2. 研究手法

《実験1》

サンクトペテルブルクのゲームを10回、100回、1000回、10000回と挑戦回数を変化させて行い、得られる賞金を調べた。このゲームでは本来コインを使用しているが、我々は1と2が偏りがなく出る乱数をコインの代わりに使用し、1をコインの裏、2をコインの表と設定して得られる賞金を調べた。

《実験2》

宝くじ(年末ジャンボ)とサンクトペテルブルクのゲームの比較をした。その際に、サンクトペテルブルクのゲームの裏の連続で出る回数に制限を設けることによって期待値を宝くじとおおよそ一致させ、非現実的なゲームを現実的に考えることができたようにした。

3. 結果

《実験1》

上記の実験の結果は下のようになった。

結果

10回	51円 (5.1円)
100回	473円 (4.7円)
1000回	6263円 (6.3円)
10,000回	57204円 (5.7円)

チャレンジ回数ごとに分けた時の 1ゲームの最大賞金

10回	2^5	32円
100回	2^7	128円
1000回	2^9	512円
10000回	2^{14}	16384円

《実験2》

宝くじの年末ジャンボの期待値を調べ、サンクトペテルブルクのゲームとの比較をした。

宝くじの期待値は(7億×23+1.5億×46+10万×4577+1000万×92+100万×920+5万×4万6000+1万×138万+3000×460万+300×4600万)÷660,000,000=100.15106060606…となり、約100円となる。また、サンクトペテルブルクのゲームで期待値が100円になるためには

$$\sum_{k=1}^{200} \left(\frac{1}{2}\right)^k 2^{k-1} = \frac{1}{2} \cdot 200 = 100$$

となるので、200回連続で裏が出た時点でゲーム終了というルールを追加すれば、サンクトペテルブルクのゲームと宝くじの期待値がほぼ同じになると言えた。また、宝くじは1枚300円であるため、このルールを追加したサンクトペテルブルクのゲームの参加費が300円以下であれば、宝くじよりこのゲームに参加した方が得であると言える。

4. 考察

実験1の結果より、挑戦回数と一回あたりの賞金の大きさに相関は見られなかった。

しかし一方で、挑戦回数ごとの1ゲームでの最大賞金(裏が最も連続で出た時の賞金:以下最大賞金と表記)を見てみると、挑戦回数が多くなるにつれて最大賞金も大きくなると言える。

また、この最大賞金がそれぞれの賞金の合計の大部分を占めていることから、得られる賞金は最大賞金に依存すると考えられる。

5. 結論

計算で示される通りの期待値を得ようと思うと、裏が∞回出るという非現実的な状況を仮定する必要があり、期待値は∞回挑戦していく中で偶然連続で裏が∞回数出るという状況に到達するまでやり続けなければならない。

6. 今後の展望

今回、サンクトペテルブルクの賭けについて実験的な方法でアプローチをした。今後の研究は、論理的な方向でサンクトペテルブルクの賭けについて研究していきたい。

7. 参考文献ならびに参考Webページ

予備校のノリで学ぶ「大学の数学・物理」(2020)
『期待値が無限大な賭け(サンクトペテルブルクのパラドックス)』
https://www.youtube.com/watch?v=B_gzT-rQjw