研究番号【37】

cosnθ dayoooooon!

数学班：曽我　央祐、古川　潤、松山　隼人

Abstract

The purpose of this study is to represent cosnθ using sinθ and cosθ. This is defined as "generalizing". Through experimentation, we were able to express the expression for cosnθ.

要約

本研究の目的は余弦のn倍角を正弦と余弦を用いて表すことである。これを「一般化する」と定義する。実験によって余弦のn倍角の式を表すことができた。

1. はじめに

研究動機は76期生の先輩が余弦のn倍角の一般化に挑戦していて研究内容を聞いて面白いと感じたためである。また、余弦の倍角は求めるために時間がかかってしまうので短時間に求めることができれば数学で役立つと思ったからである。

2. 研究手法

≪実験１≫

$\cos 2\theta \quad 2(\cos\theta)^2 \quad -1$

$\cos 3\theta \quad 4(\cos\theta)^3 \quad -3\cos\theta$

$\cos 4\theta \quad 8(\cos\theta)^4 \quad -8(\cos\theta)^2 \quad +1$

$\cos 5\theta \quad 16(\cos\theta)^5 \quad -20(\cos\theta)^3 \quad +5\cos\theta$

$\cos 6\theta \quad 32(\cos\theta)^6 \quad -48(\cos\theta)^4 \quad +18(\cos\theta)^2 \quad -1$

$\cos 7\theta \quad 64(\cos\theta)^7 -112(\cos\theta)^5 \quad +56(\cos\theta)^3 \quad -7\cos\theta$

$\cos 8\theta \quad 128(\cos\theta)^8 -256(\cos\theta)^6 +160(\cos\theta)^4 -32(\cos\theta)^2 \quad +1$

のように$\cos 2\theta$、$\cos 3\theta$、$\cos 4\theta$、$\cos 5\theta$、$\cos 6\theta$、$\cos 7\theta$、$\cos 8\theta$の値を並べてそれぞれの項の係数を初項から順に比べていき、規則性を見つける。[（例）初項に着目すると2,4,6,8,16,32,64,128となっておりこれは$\cos n\theta$をn番目とするとそのときの初項の係数$2^{(n-1)}$となる。]しかしこれではnが大きければ、それに伴い余弦のn倍角の項数も多くなってしまい、果てしなく規則性を見つけなければいけないのでこの方法では困難だと考えた。そのため、漸化式を使う方法に変えた。

≪実験２≫

和積の公式を用いると余弦のn倍角、(n+1)倍角と(n+2)倍角の関係式は$\cos(n+2)\theta = 2\cos(n+1)\theta\cos\theta - \cos n\theta$となり、$\cos n\theta = A_n$と置くと$A_{n+2} = 2(A_{n+1})\cos\theta - A_n$となり隣接3項間の漸化式となる。これを解くと

$A_n = \cos n\theta = \{(\cos\theta + \sin\theta)^n + (\cos\theta - \sin\theta)^n\}/2$　となり一般化ができた。(iは虚数単位)

3.　結果

≪実験１≫

余弦の倍角の表から一般化を図ったが、規則性は非常に多いので一つ一つを考えていくのは困難であり実験2の方法に変えた。

≪実験２≫

和積の公式より漸化式を作り一般化を図った。最終的に隣接3項間の漸化式となり一般化をすることに成功した。

4.　考察

一見すると、複雑で困難な式に見えるが、実際に具体例をnに代入し展開してみると、分子は二項定理の奇数項が2倍され、偶数項はisinθが異符号であることより打ち消し合うので、分母の2とあわせて、(cosθ+sinθ)^nを展開したときの奇数項のみが残ることが示される。したがって、虚数単位iも打ち消し合うので、余弦のn倍角は実数となる。また、(cosθ+sinθ)^nを展開したときの奇数項のみが残ることから、その係数も規則性があり、余弦のn倍角を余弦の降べきの順に並べたときの項数をmとして、

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}-m+2\right]} nC_{2m+2k-4} \times (m+k-2)C_{m-1}$$

と表せる。

余弦のn倍角と同様にして正弦のn倍角も和積の公式を用いて{(cosθ+sinθ)^n−(cosθ−sinθ)^n}/2iと表せることが分かった。また、これらを組み合わせてド・モアブルの定理を導くことも可能だと考えた。この式は、漸化式を用いて導出しているので、ド・モアブルの定理と同じく、nは本来、自然数の範囲に制限される。しかし、cosθ=cos(−θ)という式が認められているため、nは整数の範囲に拡張できる。また、nに分数を代入すると、n乗根が出てきてしまい、これを解いたn個の解の1つが正しい答えとなることが分かっている。これらのことから、この式から余弦の1/n倍角を求めることは、難しいと推測できる。

5.　結論

余弦のn倍角の式は、和積の公式や数列の隣接三項間漸化式などの知識を用いて、とても綺麗な形で導くことができた。しかし、nは数列により解いたことで、整数に限られているので、今後の展望として、分数においても用いられる新たな式や正弦を用いない形の式を考えたい。また、複素数平面やオイラーの公式との関連も更に考察の余地があるので、それらについても考えていきたい。

6.　参考文献ならびに参考Webページ

https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fmath-travel.com%2Fdouble-angle-formula%2F&psig=AOvVaw1D2tq_-NFZ0nNprEuD5cnr&ust=1706702296880000&source=images&cd=vfe&opi=89978449&ved=0CBIQjhxqFwoTCLjIvdWHhYQDFQAAAAAdAAAAABAD