研究班番号【 93 】

バラの花びら問題について極限の考え方を使って考える

数学班:内村　颯太郎、元川　介人

Abstract

We changed the conditions of the mathematical problem called the problem of rose petals , and made a proposition about the problem of shapes . After that , we prove this proposition by using the way of thinking about extremes .

要約

バラの花びら問題について条件を変更し、新しく得られた図形の問題について命題を立てる。この命題について極限の考えを用いて証明する。

1.　はじめに

立てた命題とは、半径1の円に正三角形を内接させ、その正三角形に円を内接させ、その円に正方形を内接させ、その正方形に円を内接させ、その円に正五角形を内接させる。この作業を繰り返すと、内接円の半径は、どんどん小さくなって いくように思うが、0ではない正の値で収束することを示す問題である。

2.　研究手法

①n番目の円の半径をR_n($R_1 = 1$)とおき、R_{n+1}をR_nで表し、R_nの一般項を求める。

n番目の円の半径と$(n+1)$番目の円の半径が作る角の大きさは$\frac{\pi}{n+2}$なので、

$$R_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right) R_n$$

$$\therefore R_n = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

この式におけるnを無限に近づけたときの値が収束値であるが、これは直接計算不可能と判断した。そのため別の方法で収束値を求める必要がある。

②$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$において、$\cos x$より小さい関数を$f(x)$とする。すなわち

$$R_n = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \geqq f\left(\frac{\pi}{3}\right) \times f\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \dots \times f\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

となる関数$f(x)$が見つかったとする。この式の右辺が0より大きい値に収束することを示すことにより、R_nの収束値が0より大きいことを示すことができる。

3.　結果

1.$f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$とおく。

$f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$に$x = \frac{\pi}{3}$から$x = \frac{\pi}{n+1}$まで代入すると、

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}、f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{4}、f\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{3}{5}、\dots、f\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \frac{n-1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{\pi}{3}\right) \times f\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \dots \times f\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \dots \times \frac{n-1}{n+1}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1 \times 2}{n(n+1)} = 0$$

$\therefore R_n$の収束値が0より大きいことは示すことができない。

2.$f(x)=1-\frac{x^2}{2}$とおく。

$f(x)=1-\frac{x^2}{2}$に$x=\frac{\pi}{3}$から$x=\frac{\pi}{n+1}$まで代入すると、

$f(\frac{\pi}{3})=1-\frac{\pi^2}{18}$、$f(\frac{\pi}{4})=1-\frac{\pi^2}{32}$、$f(\frac{\pi}{5})=1-\frac{\pi^2}{50}$、…、$f(\frac{\pi}{n+1})=1-\frac{\pi^2}{2(n+1)^2}$

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{\pi}{3})\times f(\frac{\pi}{4})\times\dots\times f(\frac{\pi}{n+1})=\lim_{n\to\infty} 1-\frac{\pi^2}{18}\times 1-\frac{\pi^2}{32}\times 1-\frac{\pi^2}{50}\times\dots\times 1-\frac{\pi^2}{2(n+1)^2}$$

これは計算不可能と判断した。

3.$f(x)=\sqrt{1-\frac{16x^2}{\pi^2}}$とおく。

$0\le x\le\frac{\pi}{5}$において、$\cos x\ge\sqrt{1-\frac{16x^2}{\pi^2}}$

$f(x)=\sqrt{1-\frac{16x^2}{\pi^2}}$に$x=\frac{\pi}{3}$から$x=\frac{\pi}{n+1}$まで代入すると、

$f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{1-\frac{16}{5^2}}$、$f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{1-\frac{16}{6^2}}$、$f(\frac{\pi}{5})=\sqrt{1-\frac{16}{7^2}}$、…、$f(\frac{\pi}{n+1})=\sqrt{1-\frac{16}{(n+1)^2}}$

ゆえに、$\lim_{n\to\infty} R_n\ge\cos\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}\times\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{16}{5^2}}\times\sqrt{1-\frac{16}{6^2}}\times\sqrt{1-\frac{16}{7^2}}\times\dots\times\sqrt{1-\frac{16}{(n+1)^2}}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{5^2-4^2}{5^2}}\times\sqrt{\frac{6^2-4^2}{6^2}}\times\sqrt{\frac{7^2-4^2}{7^2}}\times\dots\times\sqrt{\frac{(n+1)^2-4^2}{(n+1)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1\times 9}{5^2}\times\frac{2\times 10}{6^2}\times\frac{3\times 11}{7^2}\times\dots\times\frac{(n-3)\times(n+5)}{(n+1)^2}}$$

計算すると、$\lim_{n\to\infty} R_n\ge\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^4+14n^3+71n^2+154n+120}{70(n^4-2n^3-n^2+2n)}}=\frac{\sqrt{35}}{140}$

$\therefore f(x)$ は0より大きい値に収束する。

ここで、$f(x)=\sqrt{1-\frac{16x^2}{\pi^2}}$が$g(x)=\cos x$よりも小さいことを示す。

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{5}$において$f(x)$ $g(x)$ ともに正なので2乗しても大小関係は変わらない。よって

$1-\frac{16x^2}{\pi^2}\leqq cos^2 x$を示せば良い。この式について変形を行うと

$\sin x\leqq\frac{4}{\pi}x$と変形でき$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{5}$において$\sin x$の最大値は$\sin\frac{\pi}{5}\fallingdotseq 0,588$

$\frac{4}{\pi}x$の最大値は0,8よって$\sin x\leqq\frac{4}{\pi}x$は示され、

逆方向の変形を行うと$\sqrt{1-\frac{16x^2}{\pi^2}}\leqq\cos x$が示される。

これにより　bcos$x$より小さい関数$f(x)$ で0より大きい値に収束することを示すことができたと 言えるので、証明することができた。

4. 結論

結果よりR_nが0より大きい値で収束することがわかったので、命題を示すことができた。