(研究班番号【 92 】

サンクトペテルブルクのパラドックス　～期待値の極限を知る～

数学班:生駒　和子、坪井　悠真、西田　遥

Abstract

The St. Petersburg paradox is that the expected value and the value of the prize money are constant, increasing or decreasing, causing the expected value to diverge. This makes it more profitable to participate in the calculation of the expected value of the prize, even though it is not considered to be actually profitable. The study concluded that changing the coin probability and prize money may cause the expected value to diverge to ∞ or the expected value to converge.

要約

サンクトペテルブルクのパラドックスとは、期待値と賞金の値が一定の値で、増加、減少することにより期待値が発散する。それにより、実際には得とは思えないものが期待値の計算上では参加する方が得となることである。研究により、コインの確率、賞金を変更することで期待値が∞に発散する場合と、期待値が収束する場合があるということが結論付けられた。

1.　サンクトペテルブルクのパラドックスとは

表、裏の出る確率ともに$\frac{1}{2}$のコインを投げ、n回目に初めて表が出たとき、2^{n-1}円貰えるゲームを考える。このゲームでもらえる賞金の期待値は「無限大」になる。これは参加費がいくらであったとしても、参加した方が得であることを示唆するが、実際得であるとは考え難いので、パラドックスであるとされる。これがサンクトペテルブルクのパラドックスである。

2.　研究手法

期待値が無限になる原因が、貰える賞金が2倍,4倍…と指数関数的に増えていくのに対し、はじめて表の出る確率が$\frac{1}{2}$倍,$\frac{1}{4}$倍…と指数関数的に減少していくことだと仮定した。そこで、期待値が無限に発散しないようにするために、元来のルールを変更して期待値が収束する条件を導いた。

3.　結果

(ⅰ)コインの表の出る確率は$\frac{1}{2}$のまま、n回目に初めて表が出たときの賞金を$6n + 2$円に変更

期待値 $E_n = 8 \times \frac{1}{2} + 14 \times \frac{1}{4} + \cdots + (6n-4) \times \frac{1}{2^{n-1}} + (6n+2) \times \frac{1}{2^n}$

$\therefore E_n = 14 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 (6n+2) \to 14\ (n \to \infty)$

(ⅱ)賞金は2^{n-1}円のまま、コインの表の出る確率を変更

①コインの表の出る確率が$\frac{1}{4}$のとき

期待値$E_n = 1 \times \frac{3}{4} + 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \ldots + 2^{n-2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} + 2^{n-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \times \frac{1}{4}$

$\therefore E_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n+1}} + \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{2}{3}$　⇒期待値は収束しない。

②コインの表の出る確率が$\frac{3}{4}$のとき

期待値$E_n=1\times\frac{1}{4}+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+2^{n-2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+2^{n-1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\times\frac{3}{4}$

$\therefore E_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$　⇒期待値は0.5円に収束する。

（iii）コインの表の出る確率は$\frac{1}{2}$のまま、n回目に初めて表が出た時の賞金をn^{α}円（α：自然数）に変更

α = 1のとき（ i ）より期待値は収束する

α = βのとき期待値は収束すると仮定すると、α = β + 1のとき

期待値 $E_n=\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{\kappa^{\beta+1}}{2\kappa}=1+\sum_{\kappa=1}^{n-1}\frac{(\kappa+1)^{\beta+1}-\kappa^{\beta+1}}{2^{\kappa}}-\frac{n^{\beta+1}}{2^{n+1}}$

$(\kappa+1)^{\beta+1}-\kappa^{\beta+1}$はκのβ次式なので$\frac{1}{2^{\kappa}},\frac{\kappa}{2^{\kappa}},\frac{\kappa^2}{2^{\kappa}}\cdots\frac{\kappa^{\beta}}{2^{\kappa}}$の和はそれぞれ収束するので

α = β + 1のときも期待値は収束する

⇒ E_nが収束することを、数学的帰納法を用いて証明することができた。

4.　考察

期待値が∞に発散するのは、(iii)の証明により、賞金の増加率が、確率の減少率よりも大きい、もしくは同じ時に発生するとわかった。また、$n\to\infty$のときの増加率（発散スピード）は以下のようになることが知られている。

$$n \ll n^2 \ll n^3 \ll \ldots \ll 2^n \ll 3^n \ll \ldots \ll n! \ll n^n \quad (n\text{:自然数})$$

分母より分子の増加率が小さいときでは、期待値は収束するとわかる。