研究班番号【 95 】

フィボナッチ数列の隣接二項の比の関係性とNナッチ数列への拡張

数学班：三木優陽　山崎真生

Abstract

When we knew that the Fibonacci number has a special number$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ as a limit value, we were fascinated by it. Finding the relationship of the ratio between the two adjacent terms in Fibonacci and N-bonacci sequence is the purpose of this research. First of all, we expressed the relationship of adjacent terms in N-bonacci sequence with an equation$\left(\left(\beta_N\right)^N = \frac{1}{2-\beta_N}\right)$. Afterward,we tried to analyze the limit value of Fi and N- bonacci which is not only plus, but also minus with an explicit formula of Fibonacci sequence and the graph described about the equation().

要約

フィボナッチ数列の隣接二項の比が$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$になることが知られている。そしてその隣接二項の比が初項から第N項までの任意の値と複数項間での漸化式をもつと仮定して一般化したNナッチ数列に於いて比の値の極限値についての方程式を導出し、その方程式をグラフ化することでNナッチ数列の極限値の個数について考察した。また、無限ナッチ数列の無限項番目に於ける隣接二項の比の値が与えられるならば、それが2であるということが確認できた。

1.　はじめに

この研究で使うことばの定義について、ここに記す。

＊設定値:Nナッチ数列において第1項から第N項までを任意に設定するときのそれぞれの値。その集合をEとする。

＊フィボナッチ数列:任意の設定値に於いて、まずE（ただし全ての設定値がゼロでない）を定め、E外にある数が

漸化式:$F_n = \sum_{k=n-2}^{n-1} F_k$ を満たす数列のこと。

＊Nナッチ数列:任意の設定値に於いて、まずE（ただし全ての設定値がゼロでない）を定め、E外にある数が、また自然数のみであるものとしたとき、

漸化式:$N_n = \sum_{k=n-N}^{n-1} N_k$を満たす数列のこと。また、項の条件については上記と同じ。

（補足:上記の漸化式におけるNとは一般的にNナッチ数列を与える数$N(N \geq 2)$という意味とその数列名がNナッチ数列であることを表している）

＊隣接二項：隣り合う二項、n項と$n + 1$項のこと。

＊隣接二項の比：$\frac{N_{n+1}}{N_n}$のこと。

＊極限値：ある数列a_nまたは関数$f(x)$をあたえるnおよびxが限りなくある値に近づくとき、a_nないし$f(x)$が限りなく近づく値のこと。

（補足）本研究ではnを正の値で限りなく大きな値を取り続けるときのNナッチ数列の隣接二項の比がとる値

＊収束:極限値が取る値が一意に定まること。

2.　フィボナッチ数列に於ける隣接二項の比の極限について

任意の設定値による全てのフィボナッチ数列において、隣接二項の比が収束すると仮定し、

$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$とおく。

ここで、定義により十分に大きいn以降において、

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$である。したがって、$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right)$である

よって、方程式:$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$が成り立つ。これを解くと、$\alpha = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$となり、フィボナッチ数列の隣接二項の比の極限を得られる。(導出おわり)

3. Nナッチ数列への拡張

Nナッチ数列に於いては一般項を与える式が知られていない。そのため隣接二項の比の値の極限値を求めることが困難になる。そこで、第2章のフィボナッチ数列の隣接二項の比の値の極限値の導出過程を応用することで、Nナッチ数列の隣接二項の比の値の極限値を導出してみる。

任意のNナッチ数列で、隣接二項の比の値が収束すると仮定し、その極限値をβ_Nと置く。

定義から、十分に大きいnで

漸化式:$N_{n+1} = N_n + N_{n-1} + \cdot\cdot\cdot\cdot + N_{n-N+1}$を満たす。よって、

$\frac{N_{n+1}}{N_n} = 1 + \frac{N_{n-1}}{N_n} + \frac{N_{n-2}}{N_n} + \frac{N_{n-3}}{N_n} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{N_{n=N+1}}{N_n}$である。

したがって、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{n+1}}{N_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{N_{n-1}}{N_n} + \frac{N_{n-2}}{N_n} + \frac{N_{n-3}}{N_n} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{N_{n=N+1}}{N_n}\right)$$

ここで、隣接二項の比でない分数が出てきてしまう。この項を処理する。

例えば、

$\frac{N_{n-2}}{N_n} = \frac{N_{n-1}}{N_n} \cdot \frac{N_{n-2}}{N_{n-1}} \quad \frac{N_{n-3}}{N_n} = \frac{N_{n-1}}{N_n} \cdot \frac{N_{n-2}}{N_{n-1}} \cdot \frac{N_{n-3}}{N_{n-2}}$である。

これらのことから、全て隣接二項の比の形で表現することができるから

$\beta_N = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\beta_N\right)^{k}$である。

等比数列の和の公式より、$\frac{\left(\beta_N\right)^N(\beta_N - 2) + 1}{\beta_N - 1} = 0$(ただし$\beta_N \neq 1$(※))

$\Leftrightarrow \left(\beta_N\right)^N = \frac{1}{2-\beta_N}$

(※)この数列はN_{n+1}の導出の際に$n - N + 1$項からn項までの和を用いるが、この火砲を志向する範囲をSとすると、任意の設定値の値によらず十分な回数を施行したとき、Sに含まれる項のそれぞれの符号は+または−に偏る。よってこの数列は十分な回数施行したとき単調減少もしくは単調増加する項によってなる数列となる。だから、Sの加法の過程においてある2数の和の絶対値が2数それぞれの絶対値より小さくなることはない。したがって、十分な回数を施行したとき$\left|N_{n+1}\right| > \left|N_n\right|$が成り立つ。よって$\frac{N_{n+1}}{N_n} \neq 1$である。(証明おわり)

4. Nの偶奇による極限値の持ち方

①N=2のときについて一般項からの考察

フィボナッチ数列(N=2)に於いて、隣接二項の比が$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$になることが知られている。これはフィボナッチ数列の一般項(ビネの公式$\left(F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}\right)$)から導出できる。ここで、N=2における任意の設定値をp,qとおき、フィボナッチ数列の一般項を導出しなおす。$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$より、

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$\Leftrightarrow F_{n+2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_{n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(F_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_n\right)$$

$$F_{n+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}F_{n+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(F_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}F_n\right)$$

$$\Leftrightarrow F_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_n = \left(q - \frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$F_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}F_n = \left(q - \frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow F_n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(q - \frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(q - \frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(q - \frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(q - \frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}$$ と導出できる。

そしてこの一般項を用いて隣接二項の比の値を表すと、

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$

$$= \frac{\left\{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}}{\left\{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}} \cdots (\text{i})$$

隣接二項の比の値は上記式(i)で表され、この式を分母分子$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$で割ると、

$$(\text{i}) = \frac{\left\{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}\right\}}{\left\{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}\right\}}$$

$$= \frac{\left\{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}}{\left\{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\right\}} \cdots (\text{ii})$$

ここで、$-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1$であることに注意すると、この比の値(ii)の極限値は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}}{\left\{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\right\}} \cdots (\text{iii})$$ と表せる

[1]$q - \frac{1-\sqrt{5}}{2}p = 0$のとき

$$(\text{iii}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left\{0-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}}{\left\{0-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\right\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}} \cdots (\text{iv})$$

ここで、$\left(q - \frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}$ が約分されることから、(iv)は$q - \frac{1-\sqrt{5}}{2}p = 0$を満たす$p,q$を設定すると比の値は$n$の値によらないため、$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$をすべての隣接二項間の比の値としてもつことが分かる。

[2]$q - \frac{1-\sqrt{5}}{2}p \neq 0$のとき

$$(\text{ii}) = \frac{\left\{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}}{\left\{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)-\left(q-\frac{1+\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}\right\}} \text{（再掲）}$$

この数は約分して$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}$を消去することができないので、比の値は$n$の値によることがわかり、

$$(\text{iii}) = \frac{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p\right)} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

であることから、$q-\frac{1-\sqrt{5}}{2}p \neq 0$を満たす$p,q$を設定すると$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$を極限値としてもつことが分かる。

②$N = 2k, N = 2k+1$（kは負でない整数）について

①に於いてフィボナッチ数列の隣接二項の比の値の極限値が特定の条件下で負の値をとることが分かった。そこで、一般のNナッチ数列について、その極限値の個数、0との大小関係を調べていく。なお、以下においてもkは負でない整数として用いる。$s(x), t(x)$はxについての関数であり、$s'(x), t'(x)$は$s(x), t(x)$の微分係数である。$s(x) = x^N, t(x) = \frac{1}{2-x}$とする。この二つの関数をグラフ化したものの共有点の個数は等式$x^N = \frac{1}{2-x}$を満たすxの解の個数と一致する。

（命題） Nの値によらず、$x > 0$の範囲において$s(x), t(x)$は異なるふたつの交点をもつ

（証明）

まず、$x^N = \frac{1}{2-x}$はNによらず$x = 1$を解としてもつ⇔$s(x), t(x)$は$(1, 1)$を共有点としてもつ。

$s(x) = x^N, t(x) = \frac{1}{2-x}$

$s'(x) = Nx^{N-1}, t'(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$

$s'(1) = N, t'(1) = 1$

ここで、$N \geq 2$より、$N > 1 \Leftrightarrow s'(1) > t'(1)$

よって、$s(x), t(x)$は$(1, 1)$において交点をもつ。

また、$t(x)$は$x = 2$を漸近線としてもつが、$s(x)$は常に漸近線をもたない。

$s(x), t(x)$は連続な関数であり、$x > 0$において単調増加、$s'(x) = Nx^{N-1}$より、Nによらず$s'(x) = 0$となるのは$x = 0$のときのみである。

これらのことから、$1 < x < 2$において一点大小が逆転する。よって、$s(x), t(x)$交点をひとつもつ。

∴Nの値によらず、$x > 0$の範囲において$s(x), t(x)$は異なるふたつの交点をもつ（証明おわり）…(ⅴ)

$s(0) = 0 < \frac{1}{2} = t(0)$…(ⅵ)

$t(x)$は$y = 0$を漸近線としてもつ…(ⅶ)

$x < 0$において$s(x)$は連続でNが偶数ならば単調減少、奇数ならば単調増加…(ⅷ)

$x < 0$において$t(x)$は連続で常に単調増加…(ⅸ)

$s'(x) = Nx^{N-1}$より、Nによらず$s'(x) = 0$となるのは$x = 0$のときのみである…(ⅹ)

[1]$N = 2k+1$のとき

(ⅴ)より、$x > 0$において$s(x)$と$t(x)$は$(1, 1)$と、もうひとつの点の2点を交点としてもつ。

(ⅵ)(ⅶ)(ⅷ)(ⅸ)より、$x < 0$において$s(x)$と$t(x)$は交点をもたない。

(ⅵ)より、$x = 0$において$s(x)$と$t(x)$は交点をもたない。

[2]$N = 2k$のとき

$s(-1) = 1 > \frac{1}{3} = t(-1)$…(ⅺ)

(ⅴ)より、$x > 0$において$s(x)$と$t(x)$は$(1, 1)$と、もうひとつの点の2点を交点としてもつ。

(ⅵ)(ⅶ)(ⅷ)(ⅸ)より、$-1 < x < 0$においてNが偶数のときのみ大小は逆転する。すなわち、$x < 0$において$s(x)$と$t(x)$は交点をただひとつもつ。

(ⅵ)より、$x = 0$において$s(x)$と$t(x)$は交点をもたない。

したがって、Nが偶数のときにのみNナッチ数列は正負にひとつずつ隣接二項の比の値の極限値をもつ
（証明おわり）

5．　$N \to \infty$のときの極限値の様子

関係式:$(\beta_N)^N = \frac{1}{2-\beta_N}$が$N \to \infty$のときの左辺と右辺の状況を整理する。

なお、今回Nが奇数であった場合の極限値については交点の座標を描画してみることで点$(1, 1)$ともう一つ第一象限の点に於いてのみ交わることがわかる。よって$N = 2k$とおき、$k \to \infty$で考える。

(補足:本研究では収束値β_Nが必ず与えられるときについて特に深堀りをしている。ここで、β_NはN固有の値であるので、Nが与えられたときにβ_Nも同時に与えられている)

i)$\beta_N \leq -1$

(左辺)≥ 1,0<(右辺)$\leq \frac{1}{3}$であるため、値域が等しくならない。

ii)$-1<\beta_N<0$

左辺＝0(∵$N\to\infty$)になるのに対し、$\frac{1}{3}$<右辺<$\frac{1}{2}$であり、条件を満たすβ_Nは存在しない。

iii)$0 \leq \beta_N$

(左辺)=0、$\frac{1}{2} \leq$(右辺)<1であるため、条件を満たすβ_Nは存在しない。

またNナッチ数列の定義から$\beta_N = 1$もあり得ない。

上記のことから、Nの偶奇によって与えられる極限値に負であるものが認められている。が、$N\to\infty$のときにはNが正の1より大きい値のみになると考えられる。

6．　まとめ、展望、及び追記

(まとめ)

＊Nナッチ数列:任意の設定値に於いて、まずE（ただし全ての設定値がゼロでない）を定め、E外にある数が、また自然数のみであるものとしたとき、

漸化式:$N_n = \sum_{k=n-N}^{n-1} N_k$を満たす数列がある。

このときの

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=n-N+1}^{n} N_k}{\sum_{k=n-N}^{n-1} N_k} = \beta_N$$

とおくことができるとき、

$\lim_{N \to \infty} \beta_N$は$N$の偶奇に関わらず一意に定まる。

関係式:$\left(\beta_N\right)^N = \frac{1}{2-\beta_N}$ (導出過程は3章を参照)

及び5章の内容から、

左辺が正の無限大に発散するため、右辺も正の無限大に発散する。

このときのβ_Nは2−0に収束する。

(展望)

何度も強調している通り、この話はあくまで今回の設定したEでのみの議論である。この研究にあたって、直感的にはどのEでも収束値をおけると予想している。しかし、それの具体的なアプローチにはたどり着くことができなかった。今後のこの題材についての研究には本研究をベースとしたうえで、設定値Eに対する詳しい場合分けやより斬新なアプローチによる任意のEに成立する証明についての研究をするのが良いだろう。

（追記）

LCIIをする際、どの研究班でも具体的なテーマ決めに困るということがよくあると思います。その時、良い方法の1つが高め合える友達と一緒に研究をするといいです。あと研究題材に関しては自信を持って選びましょう。決して難問である必要でもありませんし、楽をしようと簡単なものを選ぶことを肯定しているわけでもありません。研究題材をなんとなくで選ぶ人や先生からすすめられた研究テーマに安易に乗っかる人も多数いると思います、が、LCIIは教科書や参考書学習のように答えありきのものではなく、自分でアプローチを施し、理由や結果に意味を求める科目です。基本は自分が選んだ(特に数学班は)科目に対しての研究ですから、自分がこの科目の何に興味があるのか、自分でいろんなものからアイデアを得てみましょう。

7.　謝辞

この研究をしていくにあたって、多くの課題や見落としがありました。

数学科の先生方（吉川先生、井村先生、田中先生）、また大阪サイエンスデイでの発表時に指摘、交流してくださった方々に感謝します。

8.　参考文献及びWebページ

https://www.shinko-keirin.co.jp/keirinkan/kou/tankyu/jissen/202302/data/01.pdf