

研究班番号【97】 知育玩具から学ぶ軌跡

数学班:有働 隼芽、佐藤 碧生、次田 悠真

Abstract

In this study, we think about the locus of the rolling ruler. We can draw this locus by using curve, so we can express this by using trigonometric functions which has the parameter as θ . As a result, we can get $x = \text{acos}\theta(R/r-1) + (R-r)\cos\theta, y = -\text{asin}\theta(R/r-1) + (R-r)\sin\theta$. Also, we study the area of the figures including (0,0).

要約

今回の研究ではローリングルーラーという知育玩具を用いて軌跡を考えるというものである。この知育玩具で描くことのできる図形は曲線のみで描けるため、 θ を媒介変数とした三角関数で表せると考えた。その結果、 $x = \text{acos}\theta(R/r-1) + (R-r)\cos\theta, y = -\text{asin}\theta(R/r-1) + (R-r)\sin\theta$ を得られた。また、そこで求めた式により、その図形の原点を含む側の面積(以後単に面積という)の法則性を調べた。

1. はじめに

ローリングルーラーという知育玩具を用いて描くことのできる軌跡は、どのような数式で表すことができるのか興味を持った。また、その原点を含む方の領域の面積はなにか法則性があるのかも興味を持った。

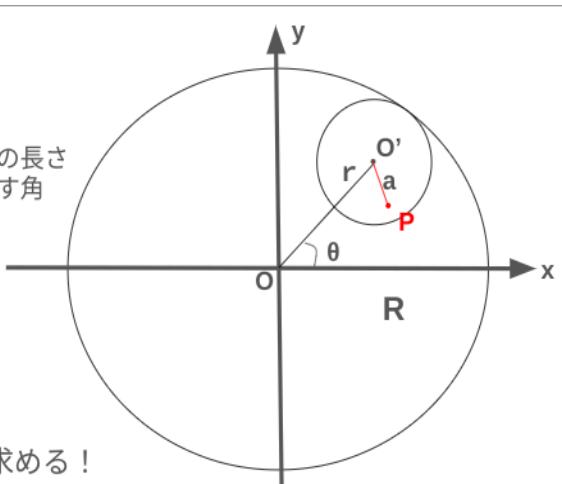
2. 研究手法

(1)図1のように文字を設定し、 $\vec{OO'} + \vec{O'P} = \vec{OP}$ を利用して求める。

また、点Pをx成分、y成分について θ を用いた媒介変数表示で表す。

(2)原点を含む方の領域の面積を積分を用いて求める。その際、 a の値を1ずつ変化させ、 $R: r$ は一定とする。また、 $R: r$ を変化させるとどうなるかについても考察した。

R : 外円の半径
r : 内円の半径
a : 内円の中心とペン穴間の長さ
 θ : x軸と内円の中心がなす角



この図からペン穴の軌跡を求める！

図1

3. 結果

(1)ベクトル表記をすると次のようになる。

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OO'} + \vec{O'P} \\ &= (a\cos\theta(R/r-1) + (R-r)\cos\theta, -a\sin\theta(R/r-1) + (R-r)\sin\theta)\end{aligned}$$

次に示すようにx, yを媒介変数 θ を用いて表すことができた。

$$x = a\cos\theta(R/r-1) + (R-r)\cos\theta, y = -a\sin\theta(R/r-1) + (R-r)\sin\theta$$

(2) $R:r$ を一定として a の値を1づつ変化させると、面積にはある法則が見られた。

(i) 表1～4にある通り一定の $R:r$ のもとで a を変化させたとき、面積には階差が等差のなっている数列であるとわかった。

(ii) 表1と2、表3と4にある通り $R:r$ の比が違っても、 $(R-r)$ の値が同じなら面積は等しくなる。

R:r=2:1

	a	R	r	S(面積)
i	0	8	4	16π
ii	1	8	4	15π
iii	2	8	4	12π
iv	3	8	4	7π

表1

R:r=3:2

	a	R	r	S(面積)
i	0	12	8	16π
ii	1	12	8	15π
iii	2	12	8	12π
iv	3	12	8	7π

表2

R:r=4:1

	a	R	r	S(面積)
i	0	16	4	144π
ii	1	16	4	143π
iii	2	16	4	140π
iv	3	16	4	135π

表3

R:r=5:2

	a	R	r	S(面積)
i	0	20	8	144π
ii	1	20	8	143π
iii	2	20	8	140π
iv	3	20	8	135π

表4

4. 今後の展望

R,r の値が整数ではなく、小数、分数、無理数のときに現れる軌跡はどうなるのか調べる。

また、面積は今回得られたような関係性を持っているのかを調べる。

各面積の関係が階差数列となった理由はなぜなのかを調べる。

今回の研究から、 $R:r$ が一定ならば、面積Sは常に等しくなることが予測されるが、それはなぜなのか明らかにする。