研究班番号【34】

逆算で視点をチェンジ？！～未解決コラッツ予想へのチャレンジ～

数学班: 奥野壮太　ほか1名

Abstract

We wondered how perspectives would be necessary when we solved mysterious problems. We intended to uncover the methods of thinking by solving Collatz conjecture,relatively understandable unsolved issues. It was difficult to generalize originally tremendous manipulation. That is why We would convert it into mathematical formulas by doing manipulation in the opposite direction. Finally , We could not generalize the manipulation because we would convert it into mathematical formulas sequentially. Thus,it is difficult to solve Collatz conjecture by the opposite manipulation,and we will need to consider another approach.

要約

未知の問題を解く上ではどんな考え方が必要か疑問に感じた。そこで比較的理解しやすい未解決問題であるコラッツ予想を解くことでその思考法を明らかにしたい。しかし本来の膨大な操作では一般化しにくい。だから後ろ向きから操作を辿ることにより、数式化していく。最終的には数列的に数式化しようとしたことで複雑化してしまい、一般化することはできなかった。よって逆向きの操作ではコラッツ予想を解くことは難しく、他の方法を考える必要があるだろう。

1.　導入

《コラッツ予想とは》

$$\forall\, a_1 \in \mathbb{N},\quad a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n = 2m) \\ 3a_n + 1 & (a_n = 2m+1) \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$ が成り立つ。

ここで、$a_{n+1} = 3a_n + 1$のときの操作を奇数操作、$a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$のときの操作を偶数操作と呼ぶことにする。

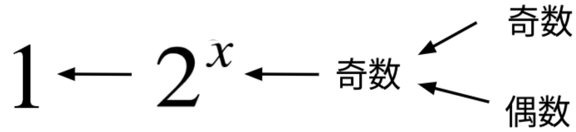
《研究目的》

本研究では未知の問題に遭遇した時に、どのような思考法が有効であるかを明らかにしていく。そのために比較的理解のしやすい未解決問題であるコラッツ予想を考えることにした。複雑化している現代社会に置いて、解決するべき未知の問題は山積している。それを解決するためには、思考力が必要になる。その思考力を形にするための通過点として、数学的思考は有効だ。その数学的思考を使うことのできる未知の問題の例がコラッツ予想である。

2.　研究方法

a_nが最終的に1に収束するため、1をはじめとしてもとの操作と逆向きに考えていく。樹形図のようにコラッツ予想を満たす数を数式化していく。そして、それらの数について規則性を見出すことで全ての自然数がその数式の中に含まれることを証明する。

(一)逆向きの操作を樹形図のように表す



(1)このとき $x = 2y\ (y \in N)$ とできる。

−証明−

2^xの後ろの奇数を z とおくと、$3z - 1 = 2^x$ が成り立つ必要がある。

$\Leftrightarrow\ z = \frac{2^x - 1}{3}\ (\in N)$ が成り立つ x を調べる。

(ア)$x = 2y - 1$ のとき

$2^{2y-1} - 1 \equiv 2 \cdot 4^{y-1} - 1 \equiv 2 \cdot 1^{y-1} \equiv 1\ (mod 3)$

(イ)$x = 2y$ のとき

$2^{2y} - 1 \equiv 4^y - 1 \equiv 1^y - 1 \equiv 0\ (mod 3)$

(ア),(イ)より、$x = 2y\ (y \in N)$とおける　□

(2)2^xの一つ前の操作の数 z は$\frac{4^{r+1} - 1}{3}(r \geq 1)$とおける

−証明−

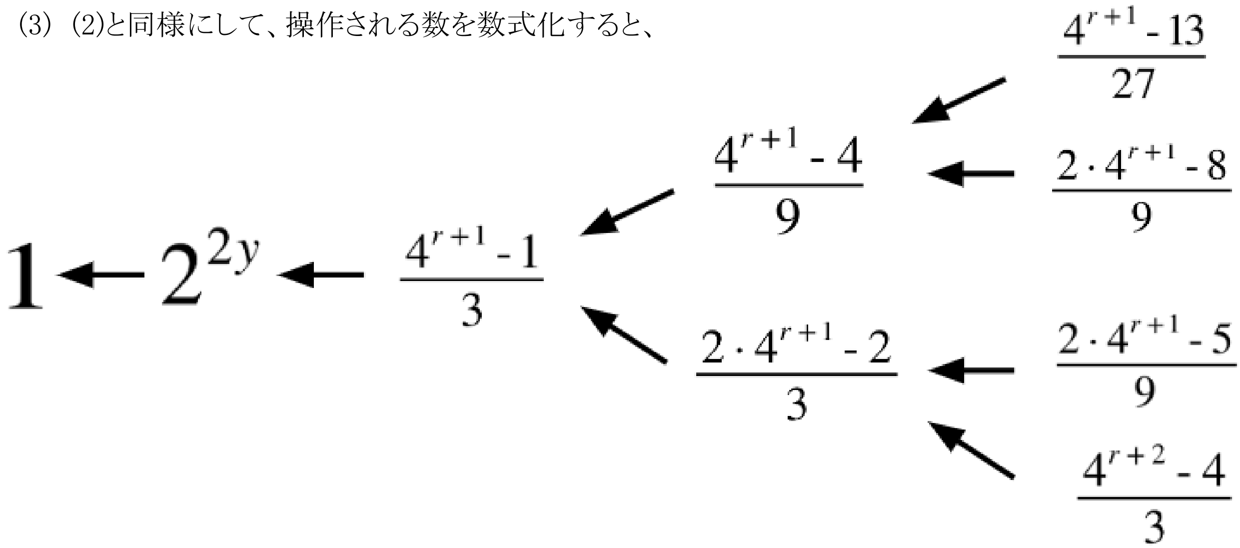
$2^x = 3z + 1$

$\Leftrightarrow\ 2^{2y} = 3z + 1$

$\Leftrightarrow\ z = \frac{4^y - 1}{3}\ (y \in N)$

$\Leftrightarrow\ z = \frac{4^{r+1} - 1}{3}\ (r \geq 1)$　□

(3) (2)と同様にして、操作される数を数式化すると、



(二)数式の規則性を見つける

1例として、$\frac{4^{r+1}-4}{9}$ のときを考えていくと、$\frac{4^{r+1}-4}{9}$ $(\in N)$ となる必要がある。

(ア) $r = 3a$ のとき $4^{3a+1} - 4 \equiv 4 \cdot (4^{3})^{a} \equiv 4 \cdot 1 - 4 \equiv 0\ (mod 9)$

(イ) $r = 3a + 1$ のとき $4^{3a+2} - 4 \equiv 4^{2} \cdot (4^{3})^{a} - 4 \equiv 3\ (mod 9)$

(ウ) $r = 3a + 2$ のとき $4^{3a+3} - 4 \equiv 4^{3} \cdot (4^{3})^{a} - 4 \equiv 6\ (mod 9)$

(ア)~(ウ)より、$r = 3a$ のとき $\frac{4^{r+1}-4}{9}$ $(\in N)$ が成立。
つまり、樹形図を広げて数式化していく中で、r の値による制限があることが分かった。

上記の方式を用いて他の数についても同様に考えていくと、r は3の剰余によって場合分けできると考えられる。しかしある地点で $\frac{4^{r}-10}{27}$ という数が現れ、これは9の剰余でないと場合分けできないものであった。ゆえに、3の剰余で場合分けをして議論していくという我々の方針は破綻した。

3. 考察

樹形図の規則性を見出すために3の剰余によって場合分けした。しかし3の剰余による場合分けは抽象性に欠けていて、さらに細かい剰余による場合分けが必要ということが考えられる。それにより奇数操作、偶数操作の起こる時の条件を見出すことがコラッツ予想解決につながると考えられる。

4. 結論

逆向きから考えることで、コラッツ予想を満たす数字を数式化できた。しかし数式に共通点を見出すことができず、膨大な樹形図になってしまった。数式化する際の計算も膨大になってしまい、樹形図を広げることも難化した。よって逆向きから考えていくでコラッツ予想を解決することは難しくということが明らかになった。

5. 展望

樹形図の数式化の際の法則性を見出す。そしてその数式が全ての自然数を含み、十分に大きい操作回数において正の無限大に発散することを証明する。そもそも法則性が見つけられなければ、逆向きに操作すること以外の方法を模索していく必要がある。