研究班番号【 94 】

2つの封筒のパラドックスについて考える

数学班：中島　竜雅

Abstract

The purposes of this study are to make it clear what is the cause of the paradox of two envelopes, and to alter the paradox's details. As a research result, the cause of this paradox is probabilities used for setting up expectations.Then I committed to resolve the paradox by changing the part, and I found that when the probability which contents of the two envelopes are "n" and "2n" is the same "$\frac{1}{n^2+2^n}$", it is not ordinary that changing the envelope you receive makes you gain or lose. From this, it is possible to resolve this paradox in my way.

要約

本研究の目的は2つの封筒のパラドックスの矛盾の原因を明らかにし、その問題設定に則ったまま運用可能に改変することである。研究結果によって、矛盾の原因は期待値を求める際に用いる確率であり、その部分を変えることで矛盾の解消を図ったところ、封筒の中身が$(n, 2n)$である確率$P(n)$についで$P(n) = \frac{1}{n^2+2^n}$のとき常に変えたほうが得または常に変えたほうが損という結果でないことがわかった。このことからパラドックスの解消が可能とわかる。

1. はじめに

本研究では、2つの封筒のパラドックスの解消案の模索し、また内容の改変により実用的なゲームにすることを目的としたものである。2つの封筒のパラドックスとはお金が入った2つの封筒の中から1つを選ぶとし、一方の封筒の中にはもう一方の倍の金額が入っている。はじめにどちらかの封筒を選び、選んだ中身を確認した後再度受け取る封筒を選ぶ。このとき中身を確認した封筒と中身を見ていないもう一方の封筒のどちらを受け取るのが得であるか。というもので、確認した中身がn円のときの期待値が$\frac{1}{2} \times \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \times 2n = \frac{5}{4}n$となり、中身がいくらであっても変えたほうが得となる。このことが現実に則さないという点がパラドックスである。

2. 研究内容

≪研究1≫

確認した中身がn円だったとして期待値$\frac{1}{2} \times \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \times 2n = \frac{5}{4}n$について確率$\frac{1}{2}$は中身$n$円をみた後の条件付き確率である。つまり封筒の中に$\frac{1}{2}n$円が用意されている確率と$2n$円が用意されている確率は同じである。入っている金額に制限を設けていないためそれぞれの金額が用意されている確率の総和が発散する。このことから上記の式は誤っている。

これより条件付き確率を設定することでパラドックスを解消する。

≪研究2≫

封筒が2つあり片方の金額がもう片方の金額の2倍であることから、2つの封筒の中身のどちらか一方は偶数である。そこで、中身の組が$(n, 2n)$である確率を$P(n)$とする。このときの期待値がn円をこえるときとこえないときの$P(n)$について考える。事象$(n, 2n)$と$(n, \frac{n}{2})$は排反であるためn円が用意されている確率は$P(\frac{n}{2}) + P(n)$で表せる。したがって、確認した中身がn円だったときに前述の事象の条件付き確率はそれぞれ$\frac{P(\frac{n}{2})}{P(\frac{n}{2})+P(n)}, \frac{P(n)}{P(\frac{n}{2})+P(n)}$と表せる。これらを用いると期待値は$\frac{n\{P(\frac{n}{2})+2P(n)\}}{2\{P(\frac{n}{2})+P(n)\}}$と表せる。これが$n$円をこえる条件は$P(\frac{n}{2}) < 2P(n)$となる。

≪研究３≫

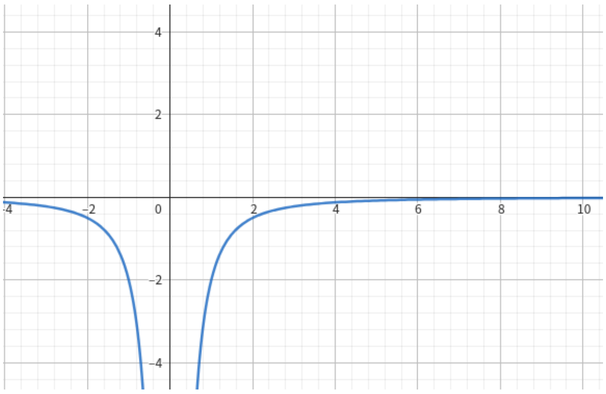
研究2で得た結果を満たす$P(n)$について考える。

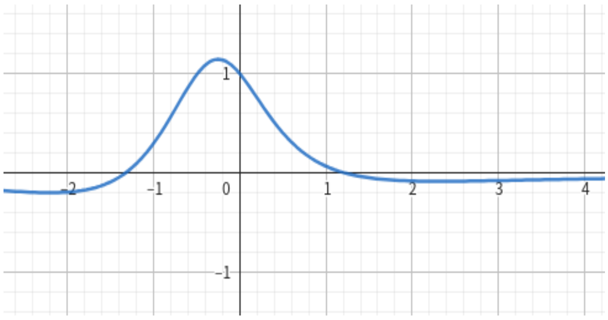
≪研究方法≫

$\sum_{n=1}^{\infty} P(n)$をみたす$P(n)$について$f(n) = 2P(n) - P(\frac{n}{2})$のグラフから$f(n)$の正負により判断する。

≪結果≫

$P(n) = \frac{1}{n^2}$と$P(n) = \frac{1}{n^2+2^n}$について考えたところ、下のようなグラフになった。





3. 結論

式からパラドックスの原因となる部分を取り除くことでパラドックスを解消することができ、条件を満たすように$P(n)$を設定する事により、常に変えたほうが得といった結果になることを避けることができるとわかった。