研究班番号【 31 】

正65537角形と円の関係について

数学班:深瀬 健太、入野 温倫

Abstract

The purpose of this research is to clarify the relationship between circles and regular 65537-sided polygons. Experiments have shown that a regular infinity-sided polygon is not equal to a circle. Therefore, in this research, it was concluded that the regular 65537-sided polygon is said to be the definition of a circle, because of the peculiarity of the number 65537, although the regular 65537-sided polygon is far from the circle.

要約

本研究の目的は、円と正65537角形の関係を明らかにすることである。実験によって、正無限角形は円と等しくない事がわかった。したがって本研究では、正65537角形は円とは異なった存在ではあるが、65537という数の特異性により、正65537角形は円の定義と言われているということが結論付けられた。

1. はじめに

私達は、動画配信サイトなどで正65537角形(以下図形Aとする)が円の定義であるということをときどき目にしていた。しかし、その根拠がインターネット上に掲載されてなかったので、それが正しいのかを図形的な観点から調べた。

65537はフェルマー素数と呼ばれる素数のうち、現在見つかっているもので最大のものである。一般に、フェルマー素数を辺の数とする正多角形は作図可能であることが知られている。

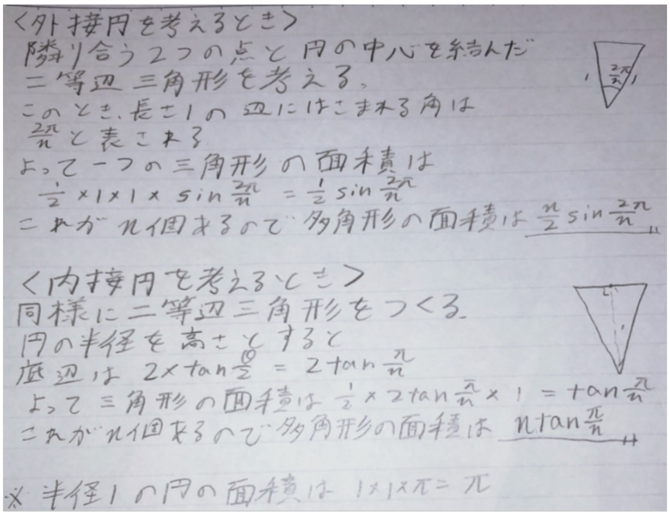
2. 研究手法

正多角形の辺の数を無限に近づけたとき、その図形が円と等しくなるのであれば、円は正多角形であり、円と図形Aは近い存在であると言えるのではないかと考えた。また、円と図形A、および図形Aと近い性質をもつ図形を比較した。

≪実験1≫

①正n角形(nは3以上の自然数)とし、正n角形の中心から頂点までの距離を1としたときの面積を調べた。

②正n角形の面積を、この図形が円に内接するか外接するかによって面積がより近いのは外接円か内接円かをグラフを用いて調べた。


<外接円を考えるとき>
隣り合う2つの点と円の中心を結んだ
二等辺三角形を考える。
このとき、長さ1の辺にはさまれる角は
$\frac{2\pi}{n}$と表される
よって一つの三角形の面積は
$\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$
これがn個あるので多角形の面積は $\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$

<内接円を考えるとき>
同様に二等辺三角形をつくる。
円の半径を高さとすると
底辺は $2\times\tan\frac{\theta}{2}=2\tan\frac{\pi}{n}$
よって三角形の面積は $\frac{1}{2}\times2\tan\frac{\pi}{n}\times1=\tan\frac{\pi}{n}$
これがn個あるので多角形の面積は $n\tan\frac{\pi}{n}$

※半径1の円の面積は $1\times1\times\pi=\pi$

≪実験２≫

・図形Aの中心から頂点までの距離を1にして、一辺の長さと面積が円とどれほど違いがあるかを調べた。

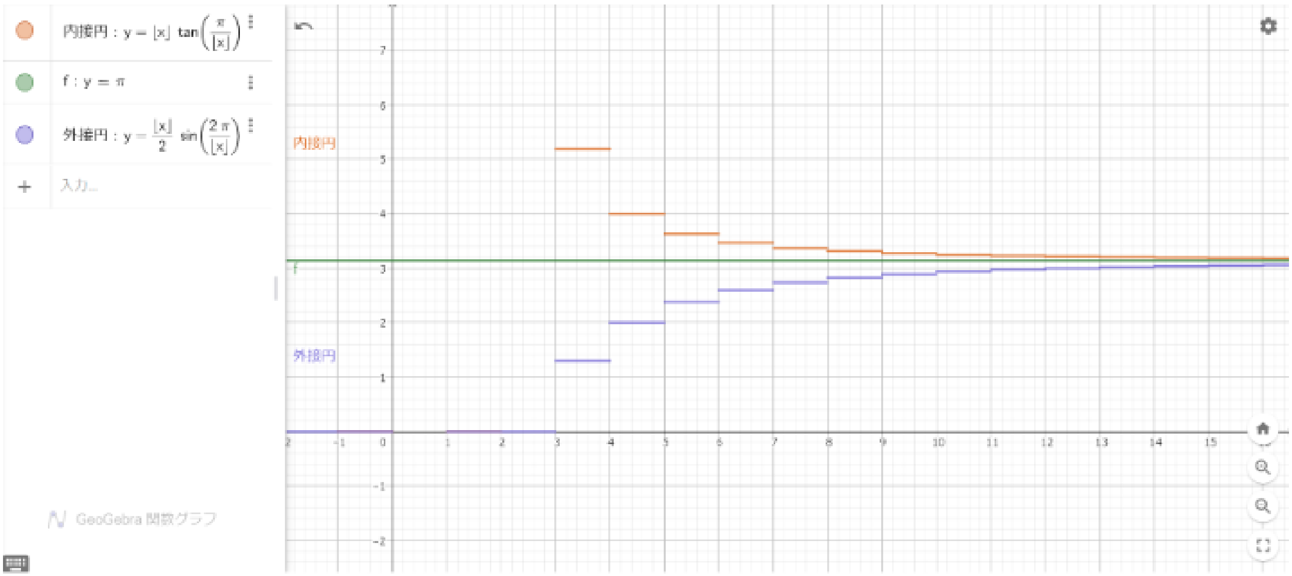
≪実験３≫

・同じく作図可能な図形である2^n角形と図形Aとの違いを実験2と同様の方法で比較した。

3. 結果

≪実験１≫

n＝3のときは内接円より外接円の方が差が小さかったが、n≧4のときは外接円より内接円の方が差が小さかった。よって実験2、3で使う円は内接円である方が適切である事がわかった。



≪実験２≫

一辺の長さは約0.000009587、面積は約3.141592648777という結果が得られた。

≪実験３≫

n＝24のときに面積が3.1415926535897となり、図形Aよりも円に近い値を得ることができた。

4. 考察

円と正多角形では違いが大きいため、円は正多角形ではない。よって正65537角形はなおさら円と違いが大きいと考えられる。また、実用的な数字として円の代わりに正多角形を用いるのであれば正2^24角形が作図可能という面から見てもよいと考えられる。図形Aが円の定義とされることがあるのは、65537という数が、現在見つかっているフェルマー素数の中で最大のものであるためということが大きな理由であると考えられる。

5. 結論

65537は現在発見されているフェルマー素数の中で最大のものである。フェルマー素数を辺の数とする正多角形はコンパスと定規のみを用いて作図可能であるということをカール・フリードリヒ・ガウスが1801年に発表した『整数論の研究』において証明している。この特異性が正65537角形が円の定義と言われる所以なのではないかと考えた。これからの課題は作図可能性が図形にとってどれほどの価値があることなのかを調べることである。

6. 参考文献ならびに参考Webページ

カール・フリードリヒ・ガウス(1801).『整数論の研究』.