研究班番号【 86 】

複素数平面を用いた2次方程式の虚数解の視覚化

数学班:塘添　悠ノ介、中川　怜音、桝田　遼太郎

Abstract

The purpose of this study is to visualize imaginary solutions using the complex number plane. Through experimentation, it was found that the intersection of the yz and x equations obtained by a certain operation on the original xy equation represents the imaginary solution. Generalizing from this, for the expression $y = ax^2 + bx + c$,z=0, the intersection of $y =- az^2 - \frac{b^2}{4a} + c$,x=$-\frac{b}{2a}$and x=$-\frac{b}{2a}$,y=0 is found to represent the imaginary solution.

要約

本研究の目的は、複素数平面を用いて虚数解を視覚化することである。実験によって、もとのxyの式に対して、ある操作をして得られたyzの式とxの式との交点が虚数解を表すとわかった。それをもとに一般化すると、$y = ax^2 + bx + c$,z=0　の式に対して、$y =- az^2 - \frac{b^2}{4a} + c$,x=$-\frac{b}{2a}$と、x=$-\frac{b}{2a}$,y=0との交点が虚数解を表すとわかった。

1. はじめに

今までの知識だと2次方程式の実数解は、グラフを用いることで視覚化することができたが、虚数解は視覚化できなかったため気になっていたところ、複素数平面を用いればできると知ったので、実際にしてみたいと考えた。また、実数解は実軸との交点で視覚化できたため、虚数解は虚軸との交点で視覚化されるのではないかと仮説を立てた。

2. 研究手法

xy平面に虚軸としてz軸を追加し、それに具体的に虚数解を持つ2次方程式をいくつか用いてどのように視覚化できるか確かめていく。また、それらをもとに一般化していく。

≪実験１≫

①y=$x^2 + 1$，y=$x^2 + 2$，y=$(x + 1)^2$+1　などの式に対してどのような式が虚数解を表せるであろう式が得られるか確かめる。

≪実験２≫

①実験１で得られた式のどこで虚数解が視覚化されるか確かめる。

3. 結果

≪実験１≫

y=$x^2 + 1$，z＝0の式に対して、z^2＝−y+1，x=0、つまり、y＝−z^2+1,x=0の式が得られた。

y=$x^2 + 2$，z＝0の式に対して、$z^2 = -y+2$，x=0、つまり、y＝−z^2+2,x=0の式が得られた。

y＝$(x + 1)^2$+1,z=0の式に対して、z^2＝−y+1，x＝−1、つまり、y＝z^2+1,x=−1、の式が得られた。

≪実験２≫

y＝−z^2+1,x=0の式のグラフとx=0,y=0との交点が虚数解を表した。

y＝−z^2+2,x=0の式のグラフとx=0,y=0との交点が虚数解を表した。

y＝z^2+1,x=−1の式のグラフとx=−1,y=0との交点が虚数解を表した。

4. 考察

実験1の結果より、もとのxy平面上の式に対してのz軸の虚数解と交わる式は、(xの式)^{2}をz^2に置き換え、x^2の符号を逆にしたものとわかった。これをもとに一般化すると、$y = ax^2 + bx + c$,z=0　の式

に対して、$y=-az^2-\frac{b^2}{4a}+c$,x=$-\frac{b}{2a}$ の式が得られることがわかった。次に実験2の結果より、この式とx＝(xy式の頂点のx座標),y=0の交点が虚数解を表すとわかった。つまり、x=$-\frac{b}{2a}$,y=0 との交点が虚数解を表すとわかった。

5. 結論

$y=ax^2+bx+c$,z=0 の式に対して、$y=-az^2-\frac{b^2}{4a}+c$,x=$-\frac{b}{2a}$と、x=$-\frac{b}{2a}$,y=0との交点が虚数解を表すとわかった。また、仮説では虚数解はグラフと虚軸の交点で視覚化されると予想していたが、実際は頂点の分ずれたところで視覚化されていた。

6. 参考文献ならびに参考Webページ

https://www.geogebra.org/3d?lang=ja