研究班番号【 33 】

バーゼル問題を座標に落とし込む

数学班：岡嶋　優那、水野　涼、松田　和樹

Abstract

The purpose of this study was to prove the Basel problem without using knowledge of college mathematics. Using the inverse square theorem and the inverse square law of light, we decomposed the circle on the coordinate plane to infinity. The process of infinite decomposition was expressed in terms of limit formulas, leading to the formula for the Basel problem.

要約

本研究の目的はバーゼル問題を大学数学の知識を使わずに証明することである。逆三平方の定理と光の逆二乗則を用いて、座標平面上の円を無限に分解していった。無限に分解する過程を極限の式で表し、バーゼル問題の式を導いた。

1．はじめに

学校の数列の授業でバーゼル問題という難問を知り興味を持った。バーゼル問題とは平方数の逆数を無限に足していった和のことであり、本来であれば高校数学で習う有名不等式やド・モアブルの定理、解と係数の関係を使って解く問題である。しかし今回は逆三平方の定理や光の性質を利用した簡易的な解法、さらに座標に落とし込むことによって視覚的にも数式的にもわかりやすく証明できる方法を研究した。

2．研究手法

≪実験1≫

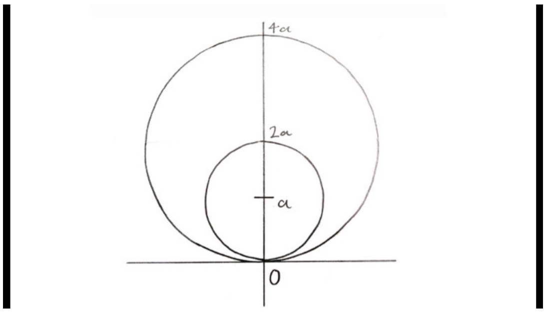
逆三平方の定理と光の逆二乗則を用いるバーゼル問題の解法について

逆三平方の定理とは直角三角形の斜辺以外の二辺の逆数の二乗の和が、直角から斜辺におろした垂線の逆数の二乗と等しくなることであり、光の逆二乗則とは光の強さは距離の二乗に反比例するということである。

①逆二乗則の比例定数が1、また、強さが1となるような任意の強さの光を用意し、座標平面上に半径がaとなるように設定した円の直径の片端に光を設置する。光を設置した反対側の端に光を受け取る観測者がいるとする。このとき観測者には強さ$1/4a^2$の光が届いている。

②二倍に相似拡大したものを観測者側で接するように設置する。(これを第二の円とする)

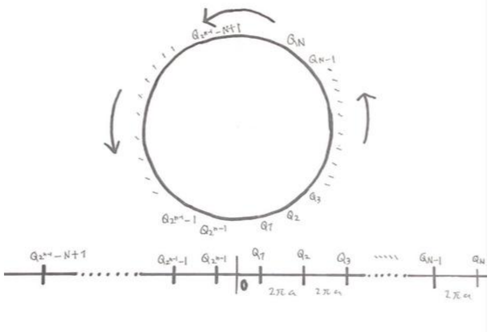
逆三平方の定理を利用し光を分解していく。(このとき、各地点での光の強さの和は$1/4a^2$のままである)



③第二の円を更に二倍に相似拡大した円を観測者側で設置する。そして第二の円のときと同様にして光を分解する。

④同じ流れで円を増やし操作を続けていくと、y軸上の正の部分に中心を持つ、半径a、2a、4a、8a…の円が描かれる。第nの円周上には、2^{n-1}個の点が定まりそれらの点は円周を2^{n-1}等分することがわかる。更に、円周角の定理から、その点と点の間の距離は第1の円周の長さである2πaである。

⑤無限に円を増やしていくことによって円がほぼ直線のようになる。この直線を数直線とみなして扱う。また、原点Oは1の点と2^{n-1}の点を結ぶ線の中点となるので、これらの点のx座標は±(2k−1)πaとなる。ただし、k＝1、2、3、…、2^{n-1}である。
円を増やしていくことによって円の半径はその都度2倍になるが、同時に円周を等分する光源の個数も2倍になるので、隣り合う光源の弧長はすべて一定であり、その長さは第1の円周2πaに等しい。



左右合計2^{n-1}この光で照らされる原点での明るさ、すなわち、原点にいる観測者が観測する照度はこれらの距離の逆数の和、すなわち、以下の式で表せる。

$$\frac{2}{(\pi a)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

これが、第1の円にあった光の照度、$1/4a^2$に等しいので、以下の式になる。

$$\frac{1}{(2a)^2}=\frac{2}{(\pi a)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

これを以下のように変形して、$\pi^2/8$が導かれる。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

したがって、以下のように考えると、$\pi^2/6$が導かれる。

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots = S \quad \text{とする}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots = \frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right) = \frac{1}{4}S$$

これより、 $S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S$

$$S = \frac{\pi^2}{6}$$

3. 結果

≪実験1≫
逆三平方の定理、光の逆二乗則を利用することによってバーゼル問題を証明することができた

≪実験2≫
座標平面を利用することによって、円を増やしていく過程や光の分解、極限の操作を数式的、視覚的に表すことができた。

4. 考察

追加した円の半径は文字式で表せられることから、円を無限に増やし直線に近づけたときの和を文字式で表すことができると考えられる。

5. 結論

バーゼル問題は、高校数学で習う有名不等式やド・モアブルの定理、解と係数の関係を使わずとも逆三平方の定理、光の逆二乗則を用いて解くことができる。また、座標に落とし込むことによって、和を求める過程がよりわかりやすくなった。さらに、円に与えた座標を利用して、和を一般化することが出来た。

6. 参考文献ならびに参考Webページ

Stardy -河野玄斗の神授業 - YouTube (最終閲覧日:2023/1/11)
https://youtube.com/@Stardy

高校数学の美しい物語 - 学びTimes (最終閲覧日:2023/1/11)
https://manabitimes.jp