研究班番号【 88 】

cos nθの一般化

88班:毛利　秀志

Abstract

Show the "cos nθ" (n is natural number) with cosθ under order n in order of action. Then see these coefficients as sequences, and generalize these sequences with n . The k−th term is represented by " $(-1)^{(k-1)}$ n(n−k){n−(k+1)}{n−(k+2)}{n−(k+3)}… {n−(2k−4)}{n−(2k−3)}・$2^{n-(2k-1)}$・1/(k−1)! $\cos^{n-2(k-1)}\theta$ ". However, n≧2(k−1) .

要約

cos nθ（nは自然数)をn次以下のcosθの式で降べきの順に表し、係数の値を数列とみなし、その数列をnを使い一般化したところ、第k項において、$(-1)^{(k-1)}$ n(n−k){n−(k+1)}{n−(k+2)}{n−(k+3)}…{n−(2k−4)}{n−(2k−3)}・$2^{n-(2k-1)}$・1/(k−1)! $\cos^{n-2(k-1)}\theta$ となった（ただし、n≧2(k−1))。

1. はじめに

コサインのn倍角の法則性について研究した。

2. 研究手法

cos1θをはじめとして、cos nθ（nは自然数)をn次以下のcosθの式で降べきの順に表し、係数の値を数列とみなし、その数列をnを使い一般化する。

3. 結果

①n=1のとき、 $\cos\theta$
②n=2のとき、 $2\cos^2\theta-1$
③n=3のとき、 $4\cos^3\theta-3\cos\theta$
④n=4のとき、 $8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$
⑤n=5のとき、 $16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$
⑥n=6のとき、 $32\cos^6\theta-48\cos^4\theta+18\cos^2\theta-1$
⑦n=7のとき、 $64\cos^7\theta-112\cos^5\theta+56\cos^3\theta-7\cos\theta$
⑧n=8のとき、 $128\cos^8\theta-256\cos^6\theta+160\cos^4\theta-32\cos^2\theta+1$
⑨n=9のとき、 $256\cos^9\theta-576\cos^7\theta+432\cos^5\theta-120\cos^3\theta+9\cos\theta$
⑩n=10のとき、$512\cos^{10}\theta-1280\cos^8\theta+1120\cos^6\theta-400\cos^4\theta+50\cos^2\theta-1$
⑪n=11のとき、$1024\cos^{11}\theta-2816\cos^9\theta+2816\cos^7\theta-1232\cos^5\theta+220\cos^3\theta-11\cos$
⑫n=12のとき、$2048\cos^{12}\theta-6144\cos^{10}\theta+6912\cos^8\theta-3584\cos^6\theta+840\cos^4\theta-72\cos^2\theta+1$
⑬n=13のとき、$4096\cos^{13}\theta-13312\cos^{11}\theta+16640\cos^9\theta-9984\cos^7\theta+2912\cos^5\theta-364\cos^3\theta+13\cos\theta$
⑭n=14のとき、$8192\cos^{14}\theta-28672\cos^{12}\theta+39424\cos^{10}\theta-26880\cos^8\theta+9408\cos^6\theta-1568\cos^4\theta+98\cos^2\theta-1$
⑮n=15のとき、$16384\cos^{15}\theta-61440\cos^{13}\theta+92160\cos^{11}\theta-70400\cos^9\theta+28800\cos^7\theta-6048\cos^5\theta+560\cos^3\theta-15\cos\theta$
⑯n=16のとき、$32768\cos^{16}\theta-131072\cos^{14}\theta+212992\cos^{12}\theta-180224^{10}\cos\theta+84480\cos^8\theta-21504\cos^6\theta+2688\cos^4\theta-128\cos^2\theta+1$
⑰n=17のとき、$65536\cos^{17}\theta-278528\cos^{15}\theta+487424\cos^{13}\theta-452608\cos^{11}\theta+239360\cos^9\theta-71808\cos^7\theta+11424\cos^5\theta-816\cos^3\theta+17\cos\theta$

4. 考察

降べきの順にして、高次のものから第1項（初項)、第2項、第3項…末項とする。

1. 初項は、 $2^{n-1}\cos^n\theta$
2. 第2項は、$-n\cdot 2^{n-3}\cos^{n-2}\theta$

3. 第3項は、$+n(n-3)\cdot 2^{n-5}\cdot 1/2\ \cos^{n-4}\theta$
4. 第4項は、$-n(n-4)(n-5)\cdot 2^{n-7}\cdot 1/6\ \cos^{n-6}\theta$
5. 第5項は、$+n(n-5)(n-6)(n-7)\cdot 2^{n-9}\cdot 1/24\ \cos^{n-8}\theta$
6. 第6項は、$-n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)\cdot 2^{n-11}\cdot 1/120\ \cos^{n-10}\theta$
7. 第7項は、$+n(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)\cdot 2^{n-13}\cdot 1/720\ \cos^{n-12}\theta$
8. 第8項は、$-n(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)(n-13)\cdot 2^{n-15}\cdot 1/5040\ \cos^{n-14}\theta$
9. 第9項は、$+n(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)(n-13)(n-14)(n-15)\cdot 2^{n-17}\cdot 1/40320\ \cos^{n-16}\theta$
10. 末項は、 自然数pを使い、$n=4p-3$のとき、$+n\cos\theta$
    $n=4p-2$のとき、-1
    $n=4p-1$のとき、$-n\cos\theta$
    $n=4p$のとき、 $+1$

11. 第k項は、$(-1)^{(k-1)}\ n(n-k)\{n-(k+1)\}\{n-(k+2)\}\{n-(k+3)\}\ldots\{n-(2k-4)\}\{n-(2k-3)\}\cdot 2^{n-(2k-1)}\cdot$
    $1/(k-1)!\ \cos^{n-2(k-1)}\theta$ と予想される。

5. 証明

1. $n=1,2,3,4,\ldots 17$のとき、第k項は、$(-1)^{(k-1)}\ n(n-k)\{n-(k+1)\}\{n-(k+2)\}\{n-(k+3)\}\ \ldots\{n-(2k-4)\}\{n-(2k-3)\}$
   $\cdot 2^{n-(2k-1)}\cdot 1/(k-1)!\ \cos^{n-2(k-1)}\theta$ が成り立っている。ただし、$n-2(k-1)\geqq 0$、$n\geqq 2(k-1)$

2. $n=m$のとき、第k項で、$(-1)^{(k-1)}\ m(m-k)\{m-(k+1)\}\{m-(k+2)\}\{m-(k+3)\}\ \ldots\{m-(2k-4)\}\{m-(2k-3)\}\cdot 2^{m-(2k-1)}$
   $\cdot 1/(k-1)!\ \cos^{m-2(k-1)}\theta$ が成り立つと仮定する。
   同じく、第k-1項、第k+1項についても、上記の式にそれぞれ$k=k-1,k+1$ を代入したものが成り立つと仮定される。
   また、$(\cos m\theta)'=-m\sin m\theta$ より、$-\sin m\theta=1/m\cdot(\cos m\theta)'$ である。
   $n=m+1$のとき、$\cos(m+1)\theta=\cos m\theta\cdot\cos\theta-\sin m\theta\cdot\sin\theta$
   $=\cos m\theta\cdot\cos\theta+1/m\cdot(\cos m\theta)'\cdot\sin\theta$
   なお、$(\cos m\theta)'$の第k-2項は、$-(-1)^{(k-3)}\ m\{m-2(k-3)\}\{m-(k-2)\}\{m-(k-1)\}(m-k)$
   $\ldots\{m-(2k-8)\}\{m-(2k-7)\}\cdot 2^{m-(2k-5)}\cdot 1/(k-3)!\ \cos^{m-2(k-3)-1}\theta\ \sin\theta$
   第k-1項は、$-(-1)^{(k-2)}\ m\{m-2(k-2)\}\{m-(k-1)\}(m-k)\{m-(k+1)\}$
   $\ldots\{m-(2k-6)\}\{m-(2k-5)\}\cdot 2^{m-(2k-3)}\cdot 1/(k-2)!\ \cos^{m-2(k-2)-1}\theta\ \sin\theta$
   第k項は、$-(-1)^{(k-1)}\ m\{m-2(k-1)\}(m-k)\{m-(k+1)\}\{m-(k+2)\}$
   $\ldots\{m-(2k-4)\}\{m-(2k-3)\}\cdot 2^{m-(2k-1)}\cdot 1/(k-1)!\ \cos^{m-2(k-1)-1}\theta\ \sin\theta$
   第k+1項は、$-(-1)^{k}\ m(m-2k)\{m-(k+1)\}\{m-(k+2)\}\{m-(k+3)\}$
   $\ldots\{m-(2k-2)\}\{m-(2k-1)\}\cdot 2^{m-(2k+1)}\cdot 1/k!\ \cos^{m-2k-1}\theta\ \sin\theta$
   第k+2項は、$-(-1)^{(k+1)}\ m\{m-2(k+1)\}\{m-(k+2)\}\{m-(k+3)\}\{m-(k+4)\}$
   $\ldots(m-2k)\{m-(2k+1)\}\cdot 2^{m-(2k+3)}\cdot 1/(k+1)!\ \cos^{m-2(k+1)-1}\theta\ \sin\theta$

   ここで、$\cos(m+1)\theta$ の第k-1項、第k項、第k+1項 に注目する。
   第k-1項（すなわち、$\cos\theta$ の指数が$m+1-2(k-2)$となる項）は、
   $(-1)^{(k-2)}\ m\{m-(k-1)\}(m-k)\{m-(k+1)\}\{m-(k+2)\}\ldots\{m-(2k-6)\}\{m-(2k-5)\}\cdot 2^{m-(2k-3)}\cdot 1/(k-2)!\ \cos^{m-2(k-2)}\theta$
   $\cdot\cos\theta$
   $+\ 1/m\cdot -(-1)^{(k-3)}\ m\{m-2(k-3)\}\{m-(k-2)\}\{m-(k-1)\}(m-k)\ldots\{m-(2k-8)\}\{m-(2k-7)\}\cdot 2^{m-(2k-5)}\cdot 1/(k-3)!$
   $\cos^{m-2(k-3)-1}\theta\ \cdot 1$
   $+\ 1/m\cdot -(-1)^{(k-2)}\ m\{m-2(k-2)\}\{m-(k-1)\}(m-k)\{m-(k+1)\}\ldots\{m-(2k-6)\}\{m-(2k-5)\}\cdot 2^{m-(2k-3)}\cdot$
   $1/(k-2)!\ \cos^{m-2(k-2)-1}\theta\ \cdot -\cos^{2}\theta$
   $m+1=A$ とおくと、
   $=(-1)^{(k-2)}\ (A-1)(A-k)\{A-(k+1)\}\{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\ldots\{A-(2k-5)\}\{A-(2k-4)\}\cdot 2^{A-(2k-2)}\cdot 1/(k-2)!$
   $\cos^{A-2(k-2)}\theta$
   $+\ (-1)^{(k-2)}\ \{A-(2k-5)\}\{A-(k-1)\}(A-k)\{A-(k+1)\}\ldots\{A-(2k-7)\}\{A-(2k-6)\}\cdot 2^{A-(2k-4)}\cdot(k-2)/(k-2)!$
   $\cos^{A-2(k-2)}\theta$

$+ (-1)^{(k-2)} (A-2k+3)(A-k)\{A-(k+1)\}\{A-(k+2)\}\ldots\{A-(2k-5)\}\{A-(2k-4)\}\cdot 2^{A-(2k-2)}\cdot 1/(k-2)!$
$\cos^{A-2(k-2)}\theta$
$=(-1)^{(k-2)} (A-k)\{A-(k+1)\}\{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\ldots\{A-(2k-6)\}\{A-(2k-5)\}\cdot 2^{A-(2(k-1)-1)}\cdot 1/(k-2)!$
$\cdot[(A-1)\{A-(2k-4)\}1/2 + \{A-(k-1)\}2(k-2) + (A-2k+3)\{A-(2k-4)\}1/2] \cos^{A-2(k-2)}\theta$
$=(-1)^{(k-2)} (A-k)\{A-(k+1)\}\{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\ldots\{A-(2k-6)\}\{A-(2k-5)\}\cdot 2^{A-(2(k-1)-1)}\cdot 1/(k-2)!$
$\cdot\{(A^2/2 -Ak +3A/2 +k-2)+(2Ak-4A-2k^2+6k-4)+(A^2/2 -2Ak +7A/2 +2k^2-7k+6)\} \cos^{A-2(k-2)}\theta$
$=(-1)^{(k-2)} (A-k)\{A-(k+1)\}\{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\ldots\{A-(2k-6)\}\{A-(2k-5)\}\cdot 2^{A-(2(k-1)-1)}\cdot 1/(k-2)!$
$\cdot(A^2-Ak+A) \cos^{A-2(k-2)}\theta$
$=(-1)^{((k-1)-1)} A\{A-(k-1)\}[A-\{(k-1)+1\}][A-\{(k-1)+2\}][A-\{(k-1)+3\}]\ldots[A-\{2(k-1)-4\}][A-\{2(k-1)-3\}]$
$\cdot 2^{A-(2(k-1)-1)}\cdot 1/\{(k-1)-1\}! \cos^{A-2((k-1)-1)}\theta$

第k項(すなわち、cos θ の指数がm+1-2(k-1)となる項)は、
$(-1)^{(k-1)} m(m-k)\{m-(k+1)\}\{m-(k+2)\}\{m-(k+3)\}\ldots\{m-(2k-4)\}\{m-(2k-3)\}\cdot 2^{m-(2k-1)}\cdot 1/(k-1)! \cos^{m-2(k-1)}\theta$
$\cdot\cos\theta$
$+ 1/m\cdot-(-1)^{(k-2)} m\{m-2(k-2)\}\{m-(k-1)\}(m-k)\{m-(k+1)\}\ldots\{m-(2k-6)\}\{m-(2k-5)\}\cdot 2^{m-(2k-3)}\cdot 1/(k-2)!$
$\cos^{m-2(k-2)-1}\theta \quad \cdot 1$
$+ 1/m\cdot-(-1)^{(k-1)} m\{m-2(k-1)\}(m-k)\{m-(k+1)\}\{m-(k+2)\}\ldots\{m-(2k-4)\}\{m-(2k-3)\}\cdot 2^{m-(2k-1)}\cdot$
$1/(k-1)! \cos^{m-2(k-1)-1}\theta \quad \cdot-\cos^2\theta$
m+1=A とおくと、
$=(-1)^{(k-1)}(A-1)\{A-(k+1)\}\{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\{A-(k+4)\}\ldots\{A-(2k-3)\}\{A-(2k-2)\}\cdot 2^{A-2k}\cdot 1/(k-1)!$
$\cos^{A-2(k-1)}\theta$
$+ (-1)^{(k-1)} \{A-(2k-3)\}(A-k)\{A-(k+1)\}\{A-(k+2)\}\ldots\{A-(2k-5)\}\{A-(2k-4)\}\cdot 2^{A-(2k-2)}\cdot(k-1)/(k-1)!$
$\cos^{A-2(k-1)}\theta$
$+ (-1)^{(k-1)} (A-2k+1)\{A-(k+1)\}\{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\ldots\{A-(2k-3)\}\{A-(2k-2)\}\cdot 2^{A-2k}\cdot 1/(k-1)!$
$\cos^{A-2(k-1)}\theta$
$=(-1)^{(k-1)} \{A-(k+1)\}\{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\ldots\{A-(2k-4)\}\{A-(2k-3)\}\cdot 2^{A-(2k-1)}\cdot 1/(k-1)!$
$\cdot[(A-1)\{A-(2k-2)\}1/2 + (A-k)2(k-1) + (A-2k+1)\{A-(2k-2)\}1/2] \cos^{A-2(k-1)}\theta$
$=(-1)^{(k-1)} \{A-(k+1)\}\{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\ldots\{A-(2k-4)\}\{A-(2k-3)\}\cdot 2^{A-(2k-1)}\cdot 1/(k-1)!$
$\cdot\{(A^2/2 -Ak +A/2 +k-1)+(2Ak-2A-2k^2+2k)+(A^2/2 -2Ak +3A/2 +2k^2-3k+1)\} \cos^{A-2(k-1)}\theta$
$=(-1)^{(k-1)} \{A-(k+1)\}\{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\ldots\{A-(2k-6)\}\{A-(2k-5)\}\cdot 2^{A-(2k-1)}\cdot 1/(k-1)!$
$\cdot(A^2-Ak) \cos^{A-2(k-1)}\theta$
$=(-1)^{(k-1)} A(A-k)\}\{A-(k+1)\}][A-\{(k+2)\}\{A-(k+3)\}\ldots\{A-(2k-4)\}\{A-(2k-3)\}$
$\cdot 2^{A-(2k-1)}\cdot 1/(k-1)! \cos^{A-2(k-1)}\theta$

第k+1項(すなわち、cos θ の指数がm+1-2kとなる項)は、
$(-1)^{k} m\{m-(k+1)\}\{m-(k+2)\}\{m-(k+3)\}\{m-(k+4)\}\ldots\{m-(2k-2)\}\{m-(2k-1)\}\cdot 2^{m-(2k+1)}\cdot 1/k! \cos^{m-2k}\theta \quad \cdot$
$\cos\theta$
$+ 1/m\cdot-(-1)^{(k-1)} m\{m-2(k-1)\}(m-k)\{m-(k+1)\}\{m-(k+2)\}\ldots\{m-(2k-4)\}\{m-(2k-3)\}\cdot 2^{m-(2k-1)}\cdot 1/(k-1)!$
$\cos^{m-2(k-1)-1}\theta \quad \cdot 1$
$+ 1/m\cdot-(-1)^{k} m(m-2k)\{m-(k+1)\}\{m-(k+2)\}\{m-(k+3)\}\ldots\{m-(2k-2)\}\{m-(2k-1)\}\cdot 2^{m-(2k+1)}\cdot$
$1/k! \cos^{m-2k-1}\theta \quad \cdot-\cos^2\theta$
m+1=A とおくと、
$=(-1)^{(k-1)}(A-1)\{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\{A-(k+4)\}\ldots\{A-(2k-1)\}(A-2k)\cdot 2^{A-(2k+2)}\cdot 1/k!$
$\cos^{A-2k}\theta$
$+ (-1)^{k} \{A-(2k-1)\}\{A-(k+1)\}\{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\ldots\{A-(2k-3)\}\{A-(2k-2)\}\cdot 2^{A-2k}\cdot k/k!$
$\cos^{A-2k}\theta$
$+ (-1)^{k} \{A-(2k+1)\}\{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\{A-(k+4)\}\ldots\{A-(2k-1)\}(A-2k)\cdot 2^{A-(2k+2)}\cdot 1/k!$
$\cos^{A-2k}\theta$
$=(-1)^{k} \{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\{A-(k+4)\}\ldots\{A-(2k-2)\}\{A-(2k-1)\}\cdot 2^{A-(2k+1)}\cdot 1/k!$
$\cdot[(A-1)(A-2k)1/2 + \{A-(k+1)\}2k + \{A-(2k+1)\}(A-2k)1/2] \cos^{A-2k}\theta$
$=(-1)^{k} \{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\{A-(k+4)\}\ldots\{A-(2k-2)\}\{A-(2k-1)\}\cdot 2^{A-(2k+1)}\cdot 1/k!$

$\cdot\{(A^2/2 - Ak - A/2 + k)+(2Ak-2k^2-2k)+(A^2/2 - 2Ak - A/2 + 2k^2+k)\} \cos^{A-2k}\theta$

$=(-1)^k \{A-(k+2)\}\{A-(k+3)\}\{A-(k+4)\}\ldots\{A-(2k-2)\}\{A-(2k-1)\}\cdot 2^{A-(2k+1)}\cdot 1/k!$

$\cdot(A^2-Ak-A) \cos^{A-2k}\theta$

$=(-1)^{(k-1)} A\{A-(k+1)\}][A-\{(k+1)+1\}][\{A-(k+1)+2\}]\ldots[A-\{2(k+1)-4\}][\{A-2(k+1)-3\}]$

$\cdot 2^{A-(2(k+1)-1)}\cdot 1/\{(k+1)-1\}! \cos^{A-2k}\theta$

3. 1. 2. より、すべての自然数 n,k において、cos n θ の第k項は、
$(-1)^{(k-1)}\, n(n-k)\{n-(k+1)\}\{n-(k+2)\}\{n-(k+3)\}\ldots\{n-(2k-4)\}\{n-(2k-3)\}\cdot 2^{n-(2k-1)}$
$\cdot 1/(k-1)!\, \cos^{n-2(k-1)}\theta$　が成り立つ。ただし、n−2(k−1)≧0、n≧2(k−1)

6. 結論

すべての自然数 n,k において、cos n θ の第k項は、
$(-1)^{(k-1)}\, n(n-k)\{n-(k+1)\}\{n-(k+2)\}\{n-(k+3)\}\ldots\{n-(2k-4)\}\{n-(2k-3)\}\cdot 2^{n-(2k-1)}\cdot 1/(k-1)!\, \cos^{n-2(k-1)}\theta$　である。ただし、n≧2(k−1)

7. 参考文献ならびに参考Webページ

https://oeis.org/?language=japanese
https://ja.wolframalpha.com