研究班番号【 84 】

ルーロー多角形の面積

数学班:児島　慧太、吉田　温史

Abstract

The area of a Loureau's polygon like the Loomba shape can be solved by finding the area of the area bounded by the fan-shaped arc and the string based on the magnitude of the interior angles, and the formula $a^2\{1+\cos(\pi/n)\}\{\pi-n\sin(\pi/n)\}+(1/2)\times\sin(2\pi/n)\times a^2 \times n=a^2[\pi\{1+\cos(\pi/n)\}-n\sin(\pi/n)]$, which means that there exists (a is the radius of the circumscribed circle of the Rouleau polygon). Considering the case $n\to\infty$, the area is πa^2, and the area of Rouleau's regular infinite polygon is equal to the area of the circle, so Rouleau's regular infinite polygon is considered to be a circle.

要約

ルンバの形のようなルーローの多角形の面積は、内角の大きさから扇形の円弧と弦に囲まれた部分の面積を求めることによって解くことができて、面積を求める公式
$a^2\{1+\cos(\pi/n)\}\{\pi-n\sin(\pi/n)\}+(1/2)\times\sin(2\pi/n)\times a^2\times n=a^2[\pi\{1+\cos(\pi/n)\}-n\sin(\pi/n)]$が存在するということがわかった(aはルーローの多角形の外接円の半径)。ここで、$n\to\infty$のときを考えると面積はπa^2になり、ルーローの正無限角形の面積は円の面積と一致するので、ルーローの正無限角形は円であると考えられる。

1. はじめに

ルーローの三角形とは、正三角形の各頂点を中心に、半径がその正三角形の一辺となる円弧でできたものである。一般に普及しているルンバの形が、ルーローの三角形であることを知った。この図形を正多角形に拡張し、面積を求めることができないかと考えた。そこで、本研究では正多角形の内角の大きさから、扇形の円弧と弦に囲まれた部分の面積をもとめ、ルーローの多角形の面積を求めた。ただし、ルーローの多角形に正偶数角形は存在しないため、正奇数角形を考える。これが数学的発展に貢献することを期待する。

2. 研究方法

正n角形に外接する円の半径をaとして、面積を求める。

3. 結果

半径aの円に内接する正n角形は、中心を頂点とするn個の二等辺三角形にわけられる。ここから、面積は$(1/2)\times\sin(2\pi/n)\times a\times a\times n$とわかる。また、正n角形の一辺の長さをbとすると、余弦定理より、
$b^2=a^2+a^2-2a\times a\times\cos(2\pi/n)=2a^2\{1-\cos(2\pi/n)\}$…①
正n角形の最長の対角線の長さをrとする。余弦定理より、$\cos(\pi/n)=(r^2+r^2-b^2)/(2\times r\times r)$
①を代入し、式を整理すると、$r^2=2a^2\{1+\cos(\pi/n)\}$…②
中心角がπ/n、半径rの扇形の弦と円弧で囲まれた部分の面積は、(扇形の面積)-(三角形の面積)より、$(\pi r^2)/(2r)-\{r^2\sin(\pi/n)\}$…③
③はルーローのn角形にn個あるので、n倍し②を代入すると、$a^2\{1+\cos(\pi/n)\}\{\pi-n\sin(\pi/n)\}$
求める面積は、この面積に正n角形の面積を足したものだから、
$a^2\{1+\cos(\pi/n)\}\{\pi-n\sin(\pi/n)\}+(1/2)\times\sin(2\pi/n)\times a^2\times n=a^2[\pi\{1+\cos(\pi/n)\}-n\sin(\pi/n)]$とわかる。

4. 考察

結果で求めた式を、$n\to\infty$にすると、πa^2となり、半径aの円のの面積と一致した。ルーローの正n角形のn→無限の極限は、円になると考えられる。

5. まとめ

ルーローの正多角形の面積を求める公式を求めることができた。