研究班番号【89】

数学オリンピックにおける関数方程式の基本的な解法

数学班:武宮涼，茂呂宜玖

Abstract
In order to qualify for the Mathematical Olympiad, it is essential to be able to deal with applied problems in all areas. In these applied problems, there is only one area that is not covered in high school mathematics: functional equations. In this study, we focus on this field and describe what kind of knowledge and thinking is needed to deal with functional equations.

1.はじめに

数学オリンピックの予選を突破しようとしたら年度により差はあれども12問のうち7,8問をミスなく正解することが必要である。この12問の内訳としては年度による差はあれども主に、問1～4は基礎的な事項、問5～8は応用的な事項、問9～12はとても発展的な事項、という流れである。したがって予選を突破しようと思えば基礎的な事項を確実に正解し、応用的事項で如何に正解できるかということにかかっている。この予選突破の為に必要な応用的事項の中に唯一高校数学で扱わないものがある。それが関数方程式だ。一応大学受験でも極稀に関数方程式が出ることがあるが、その多くは簡単な式変形で解けるものであり、難しいものは微分積分を用いて関数を決定すると言うのが主である。しかしながら数学オリンピックに出る関数方程式には簡単な式変形で解けるものは一切なく微分積分を使う問題もない。”高校数学では扱わない”数学の内容を用いて解くというのが一般的である。したがって単に数学オリンピックの関数方程式の問題を解こうとしても高校数学と数学オリンピックとのレベルの差から解くこと以前に理解することが難しいのではないかと判断した。そのため、ここではどのようにすれば数学オリンピックの関数方程式の問題を”理解”できるようになるのかという事に焦点を当てることにした。

2.3研究方法と結果

〈実験1〉

過去4年分の数学オリンピック予選･本戦で出題された関数方程式の中から高校数学では扱わない事項と扱ったとしてもさほど深く扱わない内容を抽出した。その抽出した内容を初学者でも理解ができるように解説した。定義等は検索すれば容易に出てくるのでここでは感覚的に理解出来ることを重きにおいた。

高校数学では扱わない事項及び深く扱わない事項は写像,単射･全射性,全単射,広義･狭義単調増加(減少)であった。写像とは関数のことである。数学オリンピックでは主にfだけで表現して$f:R\to Z$と表現したりする。この記号の意味は関数fにR(実数)を代入するとZ(整数)がでるという意味である。単射性とは簡単に言えば1対1の関係のことである。それだけではわからないので図を用いて説明する。

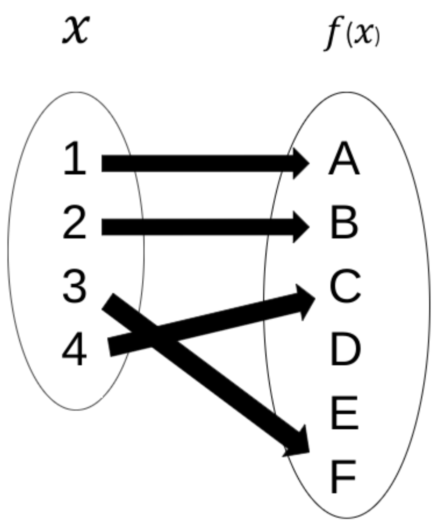

図1.単射性

高校数学でよく用いるy=f(x)を例にとった。xを代入するとyはf(x)となる。
先ほど単射とは1対1対応と言ったがこれは被りがないと言う事である。図1を見るとf(x)=Aとなるにはxに”2のみ”を代入したときに限る。つまり1を代入しても3を代入しても他のどんな数を代入してf(x)はAになることはないと言うことである。またここではf(x)には余りがでても良いとする。つまりDやEはどんなxを代入してもDやEになることはない。このような場合があっても単射性であることには問題ないのだ。
全射性とは被りはあっても良いがあまりが出ないことである。

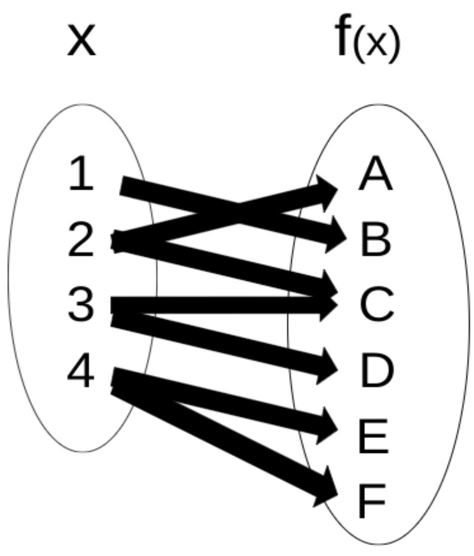

図2.全射性

まず被りがあっても良いということだが図2の様にxに2を代入したときだけでなく3を代入したときもCになる。このように複数の被りがあっても良い。次に余りがないという事だが図2の様にf(x)のいずれをとってもそれに対応するxがあることがわかる。このような場合を全射性であると言う。
全単射とは単射かつ全射であることを言う。つまり余りも被りもないと言うことである。

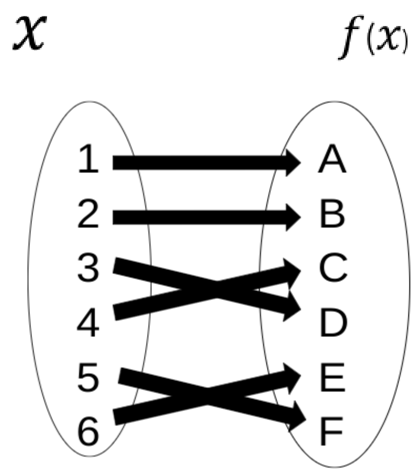

図3.全単射

次に広義･狭義単調増加(減少)についてだが広義単調増加(減少)に関しては高校数学では単に単調増加(減少)として扱っている。以下図を用いて説明をする。

fが狭義単調増加である

$x_1 < x_2$を満たす２数x_1、x_2に対して、

$f(x_1) < f(x_2)$が成立する

例)$f(x)=x$

図3.狭義単調増加

fが広義単調増加である

$x_1 < x_2$を満たす２数x_1、x_2に対して、

$f(x_1) \leqq f(x_2)$が成立する

↑

高校数学で学ぶのはこちらである。

図4.広義単調増加

狭義･広義単調減少に関しては図3･4の不等号が増加の逆であるのでここでは省略した。

〈実験2〉
実験1で抽出した内容を学んだとしてもその使い方を知らなくては関数方程式を理解することが難しいことが分かった。したがって実際に数学オリンピックに出題された問題を用いて実験1で扱った内容をどのように使われるかを解説した。
以下2019年数学オリンピック本選の大問3(ho-3)を用いて解説した。

３．　正の実数に対して定義され正の実数値をとる関数fであって、任意の正の実数x, yに対して

$$f\left(\frac{f(y)}{f(x)}+1\right)=f\left(x+\frac{y}{x}+1\right)-f(x)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。

図5.数学オリンピックho-3

ここでは模範解答とそれを理解するのに必要な補足を付け足すという方式をとる。先程の知識を頭に入れれば理解出来ることを確認した。

【3】　与式へ$y = x$を代入して,$f(x+2)-f(x) = f(2) > 0$を得る。
fが単射であることを示す。$y_1>y_2>0, f(y_1)>f(y_2)$と仮定して矛盾を導く.
与式へ$y = \frac{1}{2}(y_1-y_2)>0$を代入し,さらに,$y = y_1, y = y_2$をそれぞれ代入した２式を比べると,右辺の第１項以外の値は等しくなる.一方で,右辺の第1項については$f(x+2)-f(x) > 0$および、

$$\left(\frac{1}{2}(y_1-y_2)+\frac{y_1}{\frac{1}{2}(y_1-y_2)}+1\right)-\left(\frac{1}{2}(y_1-y_2)+\frac{y_2}{\frac{1}{2}(y_1-y_2)}+1\right)=2$$

より2式で値が異なる.したがって2式は矛盾するから,fは単射である.
与式に$x = 2$を代入して

$$f\left(\frac{f(y)}{f(2)}+1\right)=f\left(\frac{y}{2}+3\right)-f(2) = f\left(\frac{y}{2}+1\right)$$

を得る.これとfが単射であることから, $\frac{f(y)}{f(2)}+1=\frac{y}{2}+1$が成り立ち,$f(y) = \frac{f(2)}{2}y$となる.よって,$f$は正の実数$a$を用いて$f(x) = ax$と表される.
任意の実数aについて,$f(x) = ax$は与式を満たすから,これが答えである。

図6.ho-3の模範解答

与式へ$y=x$を代入して、$f(x+2)-f(x)=f(2)>0$を得る。
fが単射であることを示す。$y_1>y_2>0, f(y_1)=f(y_2)$と仮定して矛盾を導く。
(注: 単射とは被りのないこと。この場合被りがある。異なる2数y_1,y_2でのfの値が等しい)
与式へ$x=(y_1-y_2)/2>0$を代入すると
$f(f(y)/f((y_1-y_2)/2)+1)=f((y_1-y_2)/2+y/(y_1-y_2)/2+1)-f((y_1-y_2)/2))$
これに$y=y_1, y=y_2$をそれぞれ代入すると
$f(f(y_1)/f((y_1-y_2)/2)+1)=f((y_1-y_2)/2+y_1/(y_1-y_2)/2+1)-f((y_1-y_2)/2))$
$f(f(y_2)/f((y_1-y_2)/2)+1)=f((y_1-y_2)/2+y_2/(y_1-y_2)/2+1)-f((y_1-y_2)/2))$•••$
この2式を比べると左辺の第1項以外の値は等しくなる。(注:$f(y_1)=f(y_2)$より左辺は等しい)
一方で右辺の第1項については$f(x+2)-f(x)>0$ および
$((y_1-y_2)/2+y_1/(y_1-y_2)/2+1)-((y_1-y_2)/2+y_2/(y_1-y_2)/2+1)=2$ (注:
$f((y_1-y_2)/2+y_1/(y_1-y_2)/2+1)-f((y_1-y_2)/2+y_2/(y_1-y_2)/2+1)>0$ということ
より2式が異る。したがって$での2式は矛盾するので$f$は単射である。(注:仮定が間違っていることが示た。つまり$f(y_1)\neq f(y_2)$となり被りがなくなる。)
与式へ$x=2$を代入して
$f(f(y)/f(2)+1)=f(y/2+3)-f(2)=f(y/2+1)$を得る
(注:$f(x+2)-f(x)=f(2), f(x+2)-f(2)=f(x)$であるのを利用した。$x$に$y/2+1$代入したのと同じ)
これとfが単射であることから$f(y)/f(2)+1=y/2+1$が成り立ち、$f(y)=f(2)y/2$となる。(注:単射は1対1対応の事だった。つまりfの中身が同じ。同じでないのであれば被りが出てしまう。)
よってfは正の実数定数aを用いて$f(x)=ax$と表せる。これは与式を満たすのでこれが答えである。(注:必要性から答えを絞ったため十分性の確認が取れていないためその確認が必要である。つまりこの式が本当に題意を満たすのか確認しなければならない。
$f(f(y)/f(x)+1)=f(ya/xa+1)=a(y/x+1)=ya/x+a$
また
$f(x+y/x+1)-f(x)=a(x+y/x+1)-xa=ya/x+a$
となり等しくなるため十分性を持つ。)

図7.補足を付け足した解答

以上より〈実験〉1の内容を踏まえれば理解できることがわかる。

4.考察

関数方程式は高校数学で扱わないといえども然るべき知識さえつければ理解できることが分かった。またその知識さえあれば後は一般的な数学の問題の流れ通りであることも分かった。

5.結論

数学オリンピックの予選等の突破に関数方程式の攻略は必要不可欠である。その関数方程式は高校数学で扱わないため一見難しく感じるが適切な知識をつければ他の分野同様の扱いをすることができる。

6.参考文献

獲得金メダル！ 国際数学オリンピック メダリストが教える解き方と技