研究班番号【82】

ゲーム理論への理解～繰り返し囚人のジレンマゲームの最適な行動～

数学班：中尾　樹希、大石　裕貴

要約

本研究の目的は、大学数学やコンピューターを用いて研究されている繰り返し囚人のジレンマゲームについて、高校数学のみを用いて理解・証明することである。実験によって、コンピューターによって導出される結果を得ることができた。したがって本研究では、繰り返し囚人のジレンマゲームは高校数学のみでも一般解を導出できるということが結論付けられた。

1．はじめに

私たちは課題設定の際に、ゲーム理論について調べ、囚人のジレンマをモチーフとしたゲームに興味を持った。その囚人のジレンマゲームとは、A、Bの2人のプレイヤーがそれぞれ「協調」と「裏切り」という選択肢を持っており、お互いの選択の組み合わせによって得点が決まる。表のようにお互い協力する方が、協力しないよりも良い結果になることが分かっていても、協力しない者が利益を得る状況では互いに協力しなくなるという点が「ジレンマ」なのである。

また、繰り返し囚人のジレンマゲームというものがある。このゲームでは基本のルールは同じだが、この試行を無限回繰り返し、さらに最終的な得点を複数人と競うゲームである。このゲームは数学のゲーム理論の研究に利用されており、世界大会も行われている。私たちはこの大会で結果を残している二つの戦略に注目した。一つ目の「しっぺ返し戦略」は自分と相手の得点の期待値を同じ値に収束させることが知られている。二つ目の「Extortion戦略」は常に自分の得点の期待値が、相手の得点の期待値以上の値に収束することが知られている。

今回はこの二つの戦略を高校数学を用いて理解・証明することを目的に研究を行った。

2．研究手法

B_nをAだけが協調を選択する確率、　C_nをBだけが協調を選択する確率、D_nをA、Bが共に裏切A、Bが共に協調を選択した場合、それぞれに2点加算され、Aが協調、Bが裏切りを選択した場合、Bに3点、Aに0点加算され、Aが裏切り、Bが協調を選択した場合、Aに3点、Bに0点加算され、A、Bが共に裏切りを選択した場合、それぞれに1点加算される。

A¥B	協調	裏切り
協調	2¥2	0¥3
裏切り	3¥0	1¥1

しっぺ返し戦略とは、相手のひとつ前の行動を選択するものである。なお、初回のゲームでは協調を選択するとする。

また、Extortion戦略とはn回目のゲームで、A、Bが共に協調を選んだとき、n＋1回目のゲームで自分が協調を選択する確率を11/13とし、これをP_{CC}とすると、同様に$P_{CD}=1/2$、$P_{DC}=7/26$、$P_{DD}=0$として選択する戦略である。また、初回のゲームでは裏切りを選択するとする。

≪実験1　A：しっぺ返し戦略≫

①プレイヤーBが協調を選択する確率を1/2として、プレイヤーAがしっぺ返し戦略を行い、無限回繰り返したときのA,Bの期待値E_A,E_Bを求める。また、A_nをA、Bが共に協調を選択する確率、B_nをAだけが協調を選択する確率、　C_nをBだけが協調を選択する確率、D_nをA、Bが共に裏切りを選択する確率とすると、

$A_{n+1} = 1/2A_n + 1/2C_n$

$B_{n+1} = 1/2A_n + 1/2C_n$

$C_{n+1} = 1/2B_n + 1/2D_n$

$D_{n+1} = 1/2B_n + 1/2D_n$　　と表せる。

②プレイヤーBが協調を選択する確率を$p(0 \leqq p \leqq 1)$として、プレイヤーAがしっぺ返し戦略を行い、無限回繰り返したときのA,Bの期待値E_A,E_Bを求める。同様にすると、

$A_{n+1} = pA_n + pC_n$
$B_{n+1} = (1-p)A_n + (1-p)C_n$
$C_{n+1} = pB_n + pD_n$
$D_{n+1} = (1-p)B_n + (1-p)D_n$　と表せる。

≪実験2　A:Extortion戦略≫

③プレイヤーBが協調を選択する確率を1/2として、プレイヤーAがExtortion戦略を行い、無限回繰り返したときのA,Bの期待値E_A,E_Bを求める。同様にすると、

$A_{n+1} = 11/26A_n + 1/4B_n + 7/52C_n$
$B_{n+1} = 11/26A_n + 1/4B_n + 7/52C_n$
$C_{n+1} = 1/13\, A_n + 1/4B_n + 19/52C_n + 1/2D_n$
$D_{n+1} = 1/13\, A_n + 1/4B_n + 19/52C_n + 1/2D_n$　と表せる。

④プレイヤーBが協調を選択する確率を$p(0 \leqq p \leqq 1)$として、プレイヤーAがExtortion戦略を行い、無限回繰り返したときのA,Bの期待値E_A,E_Bを求める。同様にすると、

$A_{n+1} = 11/13pA_n + 1/2pB_n + 7/26pC_n$
$B_{n+1} = 11/13(1-p)A_n + 1/2(1-p)B_n + 7/26(1-p)C_n$
$C_{n+1} = 2/13p\, A_n + 1/4pB_n + 19/26pC_n + pD_n$
$D_{n+1} = 2/13(1-p)\, A_n + 1/2(1-p)B_n + 19/26(1-p)C_n + (1-p)D_n$　と表せる。

3. 結果

≪実験1　A:しっぺ返し戦略≫

①プレイヤーBが協調を選択する確率が1/2のとき

$E_A = 3/2 - 1/2n$　$E_B = 3/2 + 1/n$

nを無限大に近づけると、$E_A \to 3/2$、$E_B \to 3/2$　に収束するため、プレイヤーAとプレイヤーBの期待値は等しくなる。したがって、引き分けになる。

②プレイヤーBが協調を選択する確率がpのとき

$E_A = 2p/n + (p+1)(1 - 1/n)$　$E_B = (3-p)/n + (p+1)(1 - 1/n)$

nを無限大に近づけると、$E_A \to p+1$、$E_B \to p+1$　に収束するため、同じように期待値が等しくなる。したがって、引き分けになる。

≪実験2　A:Extortion戦略≫

③プレイヤーBが協調を選択する確率が1/2のとき

$E_A = 1/n \cdot 1/144(91 + 246n - 7^{n+1}/13^{n-1})$　$E_B = 1/n \cdot 1/72(-91 + 78n + 7^{n+1}/13^{n-1})$

nを無限大に近づけると、$E_A \to 41/24$、$E_B \to 13/12$　となるため、プレイヤーAの期待値は約1.7点、プレイヤーBの期待値は約1.1点に収束する。したがって、プレイヤーAが勝利する。

④プレイヤーBが協調を選択する確率がpのとき

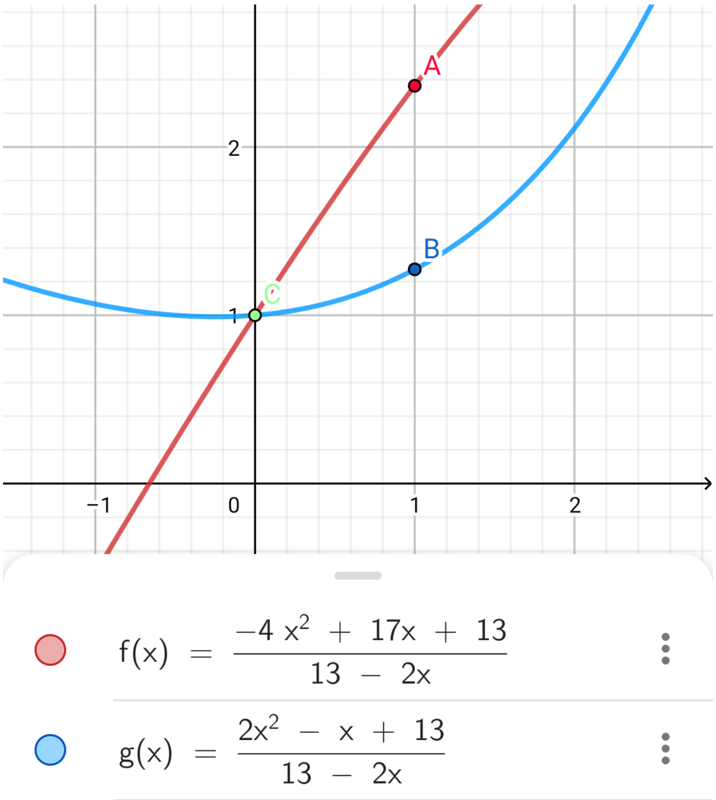
$E_A = 1/n \cdot [182p / (13-2p)^2 \{1 - (1/2p + 1/13p)^n\} - n\{(4p^2 - 17p - 13) / (13-2p)\}]$
$E_B = 1/n \cdot [364p / (13-2p)^2 \{-1 + (1/2p + 1/13p)^n\} + n\{(2p^2 - p + 13) / (13-2p)\}]$

nを無限大に近づけると、

Ⅰ:$p=0$ のとき　プレイヤーA、Bの期待値は共に1点。

Ⅱ:$0 < p \leqq 1$のとき　$E_A \to (-4p^2 + 17p + 13)/(13-2p)$、$E_B \to (2p^2 - p + 13)/(13-2p)$ となり、プレイヤーAの期待値が常に高い。(グラフより明らか)

Ⅰ、Ⅱより、プレイヤーAは常に引き分けか勝利する。



4. 考察

結果から、しっぺ返し戦略はどんな相手にも引き分けることができる戦略であるといえる。安定して得点できるので、一対一ではなく色んな相手との総得点で競う大会では結果を残すことができたのだと考えられる。

Extortion戦略はどんな相手にも引き分け以上の結果を出せる戦略であるといえる。しっぺ返し戦略と同様の理由で、大会で結果を出すことができたのだと考えられる。

5. 結論

この二つの戦略の本質はどんな相手であったとしてもお互いの期待値を一定の値に収束させることができる点であると考えられる。

今後の展望としては、しっぺ返し戦略とExtortion戦略を対戦させた結果を求められれば良いと思う。

6. 参考文献ならびに参考Webページ

囚人のジレンマゲームの相手を搾取する戦略
https://qiita.com/azumi17/items/7f02e13020a9639e290e