研究班番号【87】

ルービックキューブの規則性に関する数学的考察

数学班:南方啓希

Abstract

This study will find a mathematical method for elucidating how many repetitions are necessary for Rubik's cube to return to its original position. We numbered all 48 sides, and examined the movement of each side. We found out that the number of repetition corresponds to the LCM of the number of times of repetition where dihedron and trihedron respectively return to their original position.

1．はじめに

ルービックキューブはハンガリーの建築学者エルノー・ルービックによって考案された立体パズルであり、その名は世界に知れ渡っている。ルービックキューブの用途は多岐に渡る。今日では競技*[1]や研究対象*[2]としても扱われている。実は、ルービックキューブにはとても興味深い規則性が存在する。『ある盤面Bに任意の操作Cを繰り返すと、ルービックキューブは必ずある盤面Bに戻る』というものだ*[3]。ここである一つの疑問が浮かび上がってくる。『実際に任意の操作を繰り返した時、何回で元の盤面に戻るのか』である。本研究では、この疑問を数学的な手法を用いて解決することを主題とする。

2．定義

本研究について述べるにおいて、以下のように定義する。

《定義1》N面体

1つの面を有するキューブを一面体、2つの面を有するキューブを二面体、3つの面を有するキューブを三面体と定義する。下図1を参考

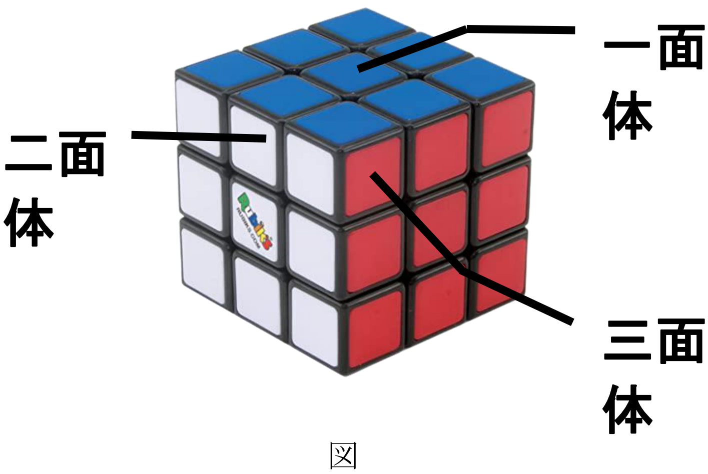

図
1

[1] スピードキュービングという六面を揃える速さを競う競技。３×３×３の世界記録は3.47秒（2020年9月6日時点）なお、立方体だけでなく、正四面体など様々な部門が存在する。

[2] ルービックキューブの様々な研究が行われている。例としては、『どのような盤面でもN手以内に完成させられる』という問題のNの決定など。なお、この研究には『God's Number』という名前が付けられている。

[3] マジックに利用されることも多々ある。

《定義2》回転操作

キューブの底面と手前の面は固定されていることを前提とする。

(1)基本操作

F(Front):前面を時計回りに回す
B(Back):後面を時計回りに回す
R(Right):右面を時計回りに回す
L(Left):左面を時計回りに回す
U(Up):上面を時計回りに回す
D(Down):下面を時計回りに回す
右図2を参考

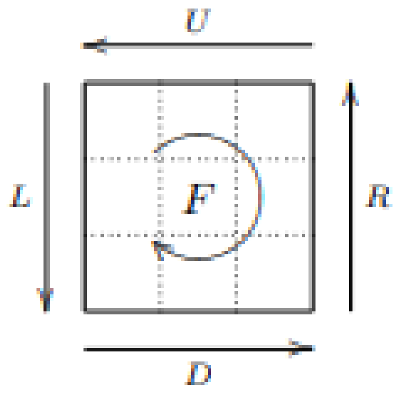

図2

(2)操作

基本操作を有限回繰り返すこと
(例)操作Fˆ2…前面を時計回りに二度回す
操作Rˆ−1…右面を反時計回りに一度回す
操作RU…右面を時計回りに一度回転させた後、上面を時計回りに一度回す

(注)○ˆ2=○ˆ−2　○△≠△○

《定義3》置換

文字を入れ替えることを置換と定義する。本研究では下のような置換を次のように表す。

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & c & d & a \end{matrix} = (a\ \ b\ \ c\ \ d)$$

図3

《定義4》各面の番号と基本操作に対応する置換

(1)各面の番号

図4を参考

(2)基本操作に対応する置換

F=(0 5 7 2)(1 3 6 4)(8 37 23 42)(11 39 18 40)(13 39 18 40)
B=(10 47 21 32)(12 46 19 33)(15 45 16 34)(15 45 16 34)(33 35 38 36)
R=(2 42 29 34)(4 44 27 36)(7 47 24 39)(8 13 15 10)(9 11 14 12)
L=(0 32 31 40)(3 35 28 43)(5 37 26 45)(16 21 23 18)(17 19 22 20)
U=(0 8 24 16)(1 9 25 17)(2 10 26 18)(32 37 39 34)(33 35 38 36)
D=(5 21 29 13)(6 22 30 14)(7 23 31 15)(40 45 47 42)(41 43 46 44)

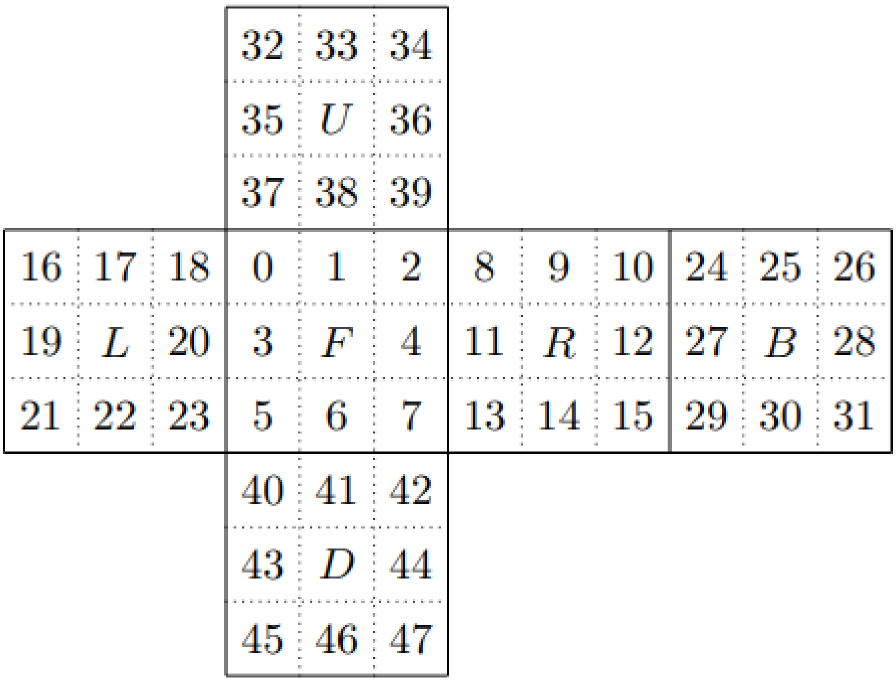

図4

3. 研究方法

操作R・操作Uに関連するルービックキューブの二面体と三面体に着目し、操作RUを行った時、各面がどの様に置換されるのかを書き出して考察する。

4. 結果

《二面体》

操作RUについて R(9 11 14 12)(4 44 27 36) U(33 35 38 36)(1 9 25 17)

9 11 14 12 4 44 27 36 33 35 38 1 25 17
11 14 12 9 44 27 36 4 33 35 38 1 25 17
11 14 12 25 44 27 33 4 35 38 36 9 17 1

以上より操作RUを繰り返すと、9→11→14→12→25→17→1→9…(4→44→27→33→35→38→36→4…)となっているため、7回繰り返せば二面体はもとに戻ることが分かった。

《三面体》

操作RUについて R(8 13 15 10)(7 47 24 39)(2 42 29 34) U(32 37 39 34)(0 8 24 16)(2 10 26 18)

8 13 15 10 7 47 24 39 2 42 29 34 32 37 0 16 26 18
13 15 10 8 47 24 39 7 42 29 34 2 32 37 0 16 26 18
13 15 26 24 47 16 34 7 42 29 32 10 37 39 8 0 18 2

以上より操作RUを繰り返すと、8→13→15→26→18→2→42→29→32→37→39→7→47→16→0→8…となって

いるため、15回繰り返せばもとに戻ることが分かった。[4]

5. 考察

『「二面体がもとに戻る」かつ「三面体がもとに戻る」⇔ルービックキューブが元の盤面に戻る』である。すなわち、ルービックキューブが元の盤面に戻るのに必要な操作の回数は二面体と三面体がそれぞれ元の盤面に戻るまでの回数の最小公倍数と予想される。

6. 結論

実際に操作RUを105回繰り返したところルービックキューブは元の盤面に戻ったため考察よりたてられた予想は正しいと言える。この方法はルービックキューブのあらゆる操作において成立するため、任意の操作を繰り返すとき何回で元に戻るかを確認したい場合はこの方法を使えば良い。またルービックキューブ以外の群に関しても同じような考え方を用いれば良いかもしれない。

7. 今後の展望

まずあまりにも時間がかかりすぎるため、より効率的な方法を確立する必要がある。次に結論でも述べたとおり、別の研究対象に本研究を応用したい。最後に3×3立方体だけでなく、4×4立方体等や、立方体以外の形についても考察したい。

8. 出典・参考文献

S.Kusafusa,置換群で解き明かすルービックキューブ,閲覧日2021-11-22,
http://imetrics.co.jp/mathematics/RubiksCube.pdf
中島秀斗,ルービックキューブと数学,2018-06-23,閲覧日 2021-11-22,
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~h-nakashima/others/suriwave/suriwaveHN.pdf

[4] 10→24→34→10･･･となる3回繰り返せばもとに戻る群も存在するが、15は３の倍数のため、この群は操作RUを15回繰り返した時にはもとに戻っている。