研究班番号【88】

最強の靴飛ばし戦法～力学の計算を用いて～

数学班:丸山　颯太、森本　歩

要約

靴飛ばしで最も飛距離が長くなる時の条件は何だろうかと気になり力学の計算によってその結果を求めることを試みた。その結果、「ブランコを持ち上げ、離すときの角度α」と「靴を飛ばすときの鎖の角度θ」には何らかの関係があることが推測できた。

またαを一定の角度として、αとθを用いた靴の飛距離Xの一般式は

$$X = 2L\cos\theta\left\{(\cos\theta-\cos\alpha)\sin\theta+\sqrt{(\cos\theta-\cos\alpha)^2\sin^2\theta+(\cos\theta-\cos\alpha)(1-\cos\theta)}\right\}+L\sin\theta$$

となった。このことから今回の条件下（下記参照）では飛距離Xの一般式に重力加速度gが関係していないので月面など重力が異なる場所でも飛距離や飛距離が最大になる角度θは地球上と変わらないことがわかる。

1. はじめに

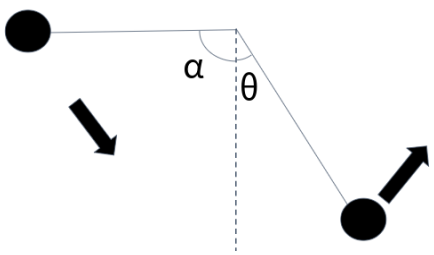
今回、私達は力学の計算を用いて身近なものについて研究したいと考えた。そこで最初は力学の計算を用いて物体の投射運動についての研究が最も身近だと考え、私達が小学生の時によく嗜み、物体の斜方投射の運動に大きく関わるブランコを使った靴飛ばしに注目しました。

靴飛ばしは人がブランコを漕いでいる状態から靴を蹴り飛ばし、靴をどれだけ飛ばすことができるか競う単純な遊びである。しかしながら、靴飛ばしでは同じ人がほとんど同じ力で靴を飛ばした場合でも飛ばすときのタイミングや角度によって飛距離が大きく変わる。多くの人が今までに靴飛ばしをしたことはあるはずだが、どの位置で靴を飛ばすと最も飛距離が長くなるか考えたことがある人は少ない。そこで私達はブランコが最も低い位置のときやブランコが最も高い位置、その中間など、どの位置で靴を飛ばすと靴の飛距離が長くなるのか気になり、研究をした。

2. 研究手法

題名でもある「最強の靴飛ばし戦法」というのは具体的に説明すると、ブランコがどの位置にあるときに靴を飛ばせば靴を一番飛ばせるのかというものである。以下の条件のもとでブランコがどの位置にあるときに最も靴を飛ばせるかを求める。

- ブランコの鎖の長さをＬ
- 靴を飛ばす瞬間のブランコの鎖と鉛直方向の角度をθ
- ブランコを持ち上げ、離す時のブランコの鎖と鉛直方向の角度をα（下図参照）
- 靴を飛ばしたときのブランコの速さが靴の初速度ｖの速さと同じ。
- 靴を飛ばすときの水平面に対する角度がθと一致。
- $\theta = 0°$の時の靴の高さを基準面とし、地面の高さとする。
- 靴は回転しないものとする。
- 靴の質量をm、重力加速度をg
- 空気抵抗や摩擦は無視する。



≪研究１≫

①α（ブランコを持ち上げ、離す時の角度)$= 90°$としてそのときの飛距離Xと靴を飛ばした位置の角度θについて求める。

②力学的エネルギー保存の法則よりα（靴を持ち上げ、離す時の角度）$= 90°$の位置と靴を飛ばしたときの角度θの位置を比較すると

$$mgL = mg(L - L\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$$

となり飛ばすときのブランコの速度及び靴の初速度は

$$v = \sqrt{2gL\cos\theta}$$

となる。

③運動方程式を用いて空中での靴の運動について以下のように考える。

空中で靴に働いている力は重力のみなので

水平方向には$0 = ma$より $\mathrm{a} = 0$ つまり等速直線運動をしていることがわかる。

鉛直方向には$mg = ma$より$a = g$ つまり等加速度直線運動をしていることがわかる。

④靴が飛んでから落下するまでの時間tを求める。鉛直方向には等加速度直線運動をしているので $y = (v\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$という式が成り立つため落下までの時間は

$$t = \frac{v\sin\theta}{g} + \sqrt{\left(\frac{v\sin\theta}{g}\right)^2 - \frac{2y}{g}}$$

と表すことができる。

また、靴を飛ばす位置は基準面から$L - L\cos\theta$、②より靴の初速度は$\sqrt{2gL\cos\theta}$なので

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}}\left\{\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta\sin^2\theta + \cos\theta(1-\cos\theta)}\right\}$$

となる。

⑤④で求めた落下までの時間tを用いて靴の発射地点から着地地点までの距離X'は等速直線運動の $x = (v\cos\theta)t$より

$$X' = 2L\cos\theta\left(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta\sin^2\theta + \cos\theta(1-\cos\theta)}\right)$$

となる

⑥⑤で求めたX'にはブランコが前に出ている部分の長さ$L\sin\theta$を考慮していない。よって実際の飛距離 Xは

$$X = 2L\cos\theta\left(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta\sin^2\theta + \cos\theta(1-\cos\theta)}\right) + L\sin\theta$$

となる。

≪研究２≫

αを一定の角度として、θとαを用いて靴の飛距離Xについての一般式を求める。

研究１と同様の方法で求めると

$X = 2L\cos\theta\left\{(\cos\theta - \cos\alpha)\sin\theta + \sqrt{(\cos\theta-\cos\alpha)^2\sin^2\theta + (\cos\theta-\cos\alpha)(1-\cos\theta)}\right\} + L\sin\theta$

となった。

３．結果

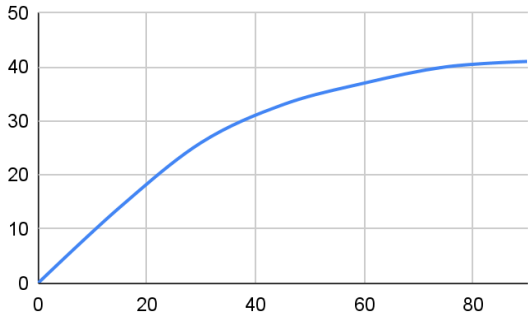
≪研究1≫

飛距離Xが最大となる靴を飛ばすときの角度 θ_{max}とおくと、α（ブランコを持ち上げ、離す時の角

度)＝90°のとき θ_{max} は約 41° となった。

≪研究2≫

求めた一般式を横軸α（ブランコを持ち上げ、離す時の角度)、縦軸θ_{max}(靴を飛ばす時の飛距離が最大となる角度)としてグラフに表すと右図のようになった。



4. 考察

≪研究2≫で導出したグラフよりα（ブランコを持ち上げ、離すときの鎖の角度)と、そのときの飛距離Xが最大となるθ_{max}(靴を飛ばす瞬間の鎖の角度)の間には何らかの関係があるのではないかと考えました。

5. 結論

靴飛ばしにおいて飛距離を長くするための最適な角度は、ブランコを大きく漕ぐ時、すなわちα（ブランコを持ち上げ、離す時の鎖の角度)が 45° 以上ならθ_{max}(靴を飛ばす時の鎖の角度)はおよそ 40° 、ブランコを小さく漕ぐ時、すなわちαが 45° 未満ならθ_{max}はαとおよそ同じ角度で靴を飛ばすと最も遠くに飛ばすことが出来る。また一般式に重力加速度gが含まれないため、今回の条件下なら月面など重力が異なる場所でも飛距離と飛距離が最大になる角度θは地球上と変わらない。