

純正律における協和音、不協和音の数学的な境目を定義する

数学班: 柿花 壮太、植 和希

要約

協和音や不協和音は、聴いて心地の良いか不快かによって定義されており、この定義がとても感覚的だと思ったため、数学的にその境目を定義しようと考え、音同士を最も単純な整数比で表せられる音律である純正律を用い、基音とその他すべての音の周波数比に着目し研究した。その2音の周波数比が、単純であるほど協和するということが経験則としてわかっているため、それらの分子と分母の積に注目することによって具体的な数値を導出することができ、純正律における協和音と不協和音の境目を定義することができた。

音律とは、ドレミといった音を導出する際にどのような規則性を持って行うかを定める方法で、純正律の場合、基音をまず決めて、(今回は一般的に用いられる、「ド」を用いて研究を行った。)その音に最も調和する音を順番に12個揃えたものである。

更に、純正律での導出が可能であると分かったため、同じく整数比で表されるピタゴラス音律でも導出できるのかについて、続けて研究した。ピタゴラス音律とは、基音(この場合「ラ」)の周波数を等倍し続け、12個の音を導出する方法である。

純正律とピタゴラス音律の違いを調べるため、基音と各音の周波数比に並べてみると、周波数比が一致する点がいくつか見つかったため、ピタゴラス音律を導出する際に生じる和音の周波数比のズレの位置と比較することにより、それらの違いはズレが3つに分割されているか、1つにまとめられているかという違いだけであることがわかり、ピタゴラス音律における新たな境目も定義できることがわかった。しかし、ピタゴラス音律では数値が大きくなってしまい境目を定義するには、あまり適していないことがわかったため、純正律で定義するのが相応しいことがわかった。

1. はじめに

まず、純正律とは、一つの音律であり、基準音に最も協和する音と、その基準音を合わせ、12個の音の並びを表す音律である。平均律やピタゴラス音律と違い、基準音との周波数の比を簡単な整数比で表すことができるのでこの音律を用いることにした。

次にピタゴラス音律とは、最も古い音律の一つとされており、基準音(ラ)から上下に純粋な完全5度の音を取り、それぞれの音をさらに拡張して12個の音を作成し、最後にオクターヴに生じるズレを修正し、作成された音律である。

現在楽器などに用いられている音律(平均律)は音律を作成する際に対数比を使用しており、定義することが困難だと感じたため、純正律という音律を用いることにした。また、純正律の完全5度はピタゴラス音律と比較してどの程度のズレが生じるのかを調べ、ピタゴラス音律との関係性があるかについても調査した。

2. 研究手法

最初に、純正律における基準音(ド)に対する他の音の協和性を表に示し、規則性があるかを調べた。次にその基準音を1音ずつ変えていき、「ド」のときと比べて違いがあるか調べた。そして純正律とピタゴラス音律の完全5度の協和音について、その違いを調査した。

《実験1》

①基準音から各音の周波数比とその分数比の積を表にまとめた結果、次のようになった。

このことから、協和音はその分数の積が12までとなる音であり、不完全協和音は、その分数の積が15～40となる音、不協和音はその分数比が45～となる音であると定義することができると分かった。

音名	ド	ド#	レ	レ#	ミ	ファ	ファ#	ソ	ソ#	ラ	ラ#	シ
周波数比	1	16/15	9/8	6/5	5/4	4/3	45/32	3/2	8/5	5/3	9/5	15/8
分数の積	1	240	72	30	20	12	1440	6	40	15	45	120

②純正律の完全5度となるすべての和音とピタゴラス音律の同じものを比較して

3. 結果

協和音か不協和音かは、和音の周波数の分数比の単純さによって決まっており、その分数比の分母と分子の積の大きさによって識別することができる。また、純正律の1オクターブ以内の和音に生じる周波数比のズレは、ピタゴラス音律を作るときに生じるズレと大きさが等しい事がわかり、そのピタゴラス音律の1箇所のみ存在するズレを3つに分割したものが純正律という音律になることがわかった。

4. 考察

分数比で表すことができるのは純正律だけなので、他の音律でも使うことのできるものはないか。また、純正律はピタゴラス音律を参考にして作られたのではないか。

5. まとめ

純正律のように他の音律を取り込んで作られたような音律もあるので既存の音律を更に研究していくことで完璧な音律を作ることができるかもしれない。

6. 参考文献ならびに参考webページ

http://www.takuichi.net/hobby/edu/sonic_wave/temperament_just_intonation/temp_just.pdf