

# サンクトペテルブルクのパラドックスの標本抽出による解法

数学班:木戸若葉

## 要約

サンクトペテルブルクのパラドックスで妥当な参加費が $\infty$ 円となるのは、期待値計算に現実的といえない仮定をする可能性が含まれているためである。そのような可能性を無くす考え方として知られる標本抽出について、具体的な値や式で示し、その値がより現実的といえる理由を考察し、その他のゲームへの利用についても考察した。

## 1. はじめに

サンクトペテルブルクのパラドックスとは

- ・偏りのないコインを表が出るまで投げ続け、コインを投げた回数に応じて賞金がもらえるゲーム。
- ・ $n$ 回目に初めて表が出たとき賞金が $2^{(n-1)}$ 円。
- ・賞金の期待値と参加費が等しいときの参加費は妥当であり、このゲームの妥当な参加費は $\infty$ 円となる。
- ・このゲームで10回目に初めて表がでるとき、その確率は $1/1024$ であり、そのとき得られる賞金は512円である。

このゲームに参加費が必要であったとき、参加費がいくら大金でも参加するべきという期待値計算は正しいかという問題。

このパラドックスの現実的な解釈について研究を進めた。

## 2. 研究手法

通常の期待値計算で期待値が無量大となるのは、無限回連続で表が出ない可能性を含む仮定によるものである。

現実的な期待値を求めるために、試行回数が有限であることを仮定する。

大人数がゲームに参加したときの分布から期待値を考える標本抽出という考え方をを用いた。

### 《研究1》

標本抽出を使って、 $2^N$ 人がゲームに参加したときの分布から期待できる賞金(妥当な参加費)を求める。

標本抽出では大数の法則に基づいて分布している。

### 《研究2》

このゲームに限らず、期待値が無量大に発散するゲームは参加費がいくら大金でも参加するべきであると言える。このことについても直感に反するため、得られる賞金が $2^{(n-1)}$ などの $2^{(n-1)}$ 以外のゲームについても期待できる賞金(妥当な参加費)を求める。

①、②についても参加人数を $2^N$ 人とする。

## 3. 結果

### 《研究1》

分布は以下のようになる。

	確率	賞金	人数
1回目に表	$1/2$	$2^0$ 円	$2^{(N-1)}$ 人
2	$1/4$	$2^1$ 円	$2^{(N-2)}$ 人
3	$1/8$	$2^2$ 円	$2^{(N-3)}$ 人
⋮			
$n$	$1/2^n$	$2^{(n-1)}$ 円	1人
$n+1$ 回目に表	$1/2^{(n+1)}$	$2^n$ 円	1人

$2^N$ 人が参加したときの平均獲得賞金は $N/2+1$ 円となり、期待できる賞金(妥当な参加費)が少額であるという直感と一致する。

#### 《研究2》

②についても研究1と同様に平均獲得賞金(妥当な参加費)を求めた。

②の分布は以下のようなになる。

	確率	賞金	人数
1回目に表	$1/2$	$3^0$ 円	$2^{N-1}$ 人
2	$1/4$	$3^1$ 円	$2^{N-2}$ 人
3	$1/8$	$3^2$ 円	$2^{N-3}$ 人
⋮			
$N-1$	$1/2^{N-1}$	$3^{N-2}$ 円	$2^{N-(N-1)}$ 人
$N$	$1/2^N$	$3^{N-1}$ 円	1人
$N+1$	$1/2^{N+1}$	$3^N$ 円	1人

賞金×その賞金を得た人数の和÷参加人数 $2^N$  によって平均獲得賞金を導出すると

平均獲得賞金= $2(3/2)^N-1$ 円

このゲームについても期待できる賞金(妥当な参加費)は直感に一致するような少額になる。

#### 4. 考察

標本抽出の考え方によって無限回連続で表が出続けるという非現実的な仮定をなくし、試行回数が有限であると仮定することで、パラドックスが解消できた。

無限回連続で表が出続けることだけでなく、胴元の財産が無限にあるという仮定も期待値が現実的でないことの原因となっていると考えられる。

また研究2のように、このゲームに限らず期待値の計算に非現実的な仮定が含まれるゲームは、この考え方によって現実的な期待値が求められるのではないかと考えられる。

#### 5. 結論

無限回続くことや胴元の財産が無限にあることなど、非現実的なことが仮定されるゲームでは直感と一致するような期待値は単純な期待値計算ではなく、非現実的な仮定を除き、すべて有限の範囲で考える標本抽出による期待値計算で現実的な値に落ち着くことがわかった。

#### 6. 参考文献ならびに参考Webページ

予備校のノリで学ぶ「大学の数学・物理」(2020)

『期待値が無限大な賭け(サンクトペテルブルクのパラドックス)』

[https://www.youtube.com/watch?v=B\\_gzT-rQjw](https://www.youtube.com/watch?v=B_gzT-rQjw)