研究班番号【90】

多角形に内接していく円の半径 ～蟻地獄～

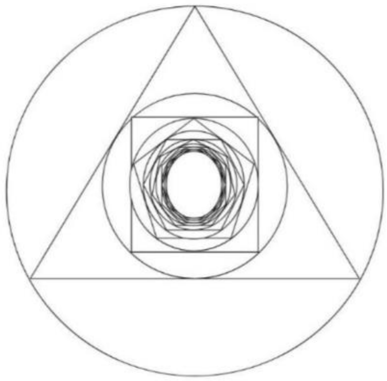
90 班:小山　瑞季、小野山　昌幸、多々良　俊太

要約

・円C_1に内接する正 3 角形を描き、正3角形に内接する円C_2を描く。
・円C_2に内接する正 4 角形を描き、正4角形に内接する円C_3を描く。
・円C_3に内接する正 5 角形を描き、正5角形に内接する円C_4を描く。
以下同様に、
円C_nに内接する正$n+2$角形を描き、正$n+2$角形に内接する円C_{n+1}を描く。
円C_nの半径をR_nとすると、R_nはnについて単調に減少するが、

$$\lim_{n\to\infty} R_n$$

は 0 でない正の値に収束することがわかった。
　これを、極限の知識を用いて明らかにすることが本研究の目的である。



1. 研究手法

　最も外側にある円の半径をR_1、2 つ目の円R_2、n番目に内接する円をR_nとすると、円の半径の一般式は、

$$R_n = \cos\frac{\pi}{3}\times\cos\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{5}\times\cos\frac{\pi}{6}\times\cos\frac{\pi}{7}\times\cdots\times\cos\frac{\pi}{n}$$

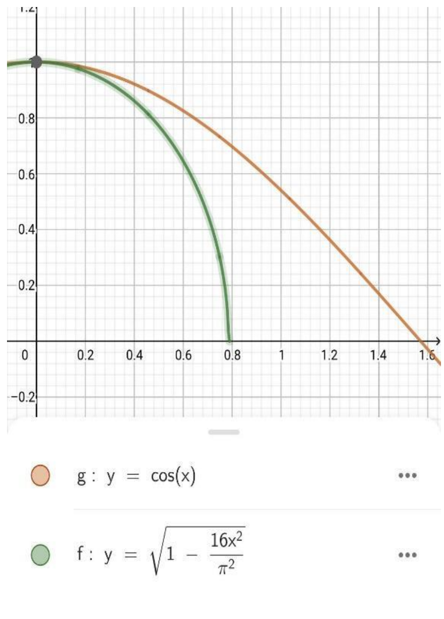
と表される。

　このR_n が$n\to\infty$で 0 でない正の値に収束すれば、円を無限に内接させてもある一定の大きさでとどまると言える。しかし、R_n の極限値を直接計算することは難しい。そこで、R_nよりも少し小さい値r_nと比較し、その極限値が 0 でない正の数に収束すれば、R_n も正の値に収束するといえるので、この方針をとった。r_nの式は、関数グラフから予想した。

$r_n = \sqrt{1-\frac{16}{\pi^2}n^2}\,(n \geqq 5)$とする。

(i) $\sqrt{1-\dfrac{16}{\pi^2}x^2} < \cos x$を証明する。

(ii) $\displaystyle\prod_{x=5}^{\infty}\sqrt{1-\frac{16}{\pi^2}x^2}$がどの値に収束するのか求める。



2. 結果

≪(i)について≫

$0 < x < \frac{\pi}{5}$の範囲で$\sqrt{1-\frac{16}{\pi^2}x^2} < \cos x$を示す。

【証明】

$0 < x < \frac{\pi}{5}$の範囲では$\cos x > 0$かつ$\sqrt{1-\frac{16}{\pi^2}x^2} > 0$なので

両辺を 2 乗した$1-\frac{16}{\pi^2}x^2 < \cos^2 x$を示せばよい。

$$1-\frac{16}{\pi^2}x^2-\cos^2 x = \sin^2 x-\frac{16}{\pi^2}x^2 = \left(\sin x+\frac{4}{\pi}x\right)\left(\sin x-\frac{4}{\pi}x\right)$$

$\sin x+\frac{4}{\pi}x$は$0 < x < \frac{\pi}{5}$の範囲で常に正である。

$$\sin x-\frac{4}{\pi}x = f(x)$$

とおくと

$$f'(x) = \cos x - \frac{4}{\pi}$$

であるから、$0 < x < \frac{\pi}{5}$の範囲で$f'(x) < 0$つまり$f(x)$は単調減少…① また、$f(0) = 0$…②

①②より$\sin x - \frac{4}{\pi}x < 0$なので

$$\left(\sin x + \frac{4}{\pi}x\right)\left(\sin x - \frac{4}{\pi}x\right) < 0$$

これらより$0 < x < \frac{\pi}{5}$の範囲で$\sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2}x^2} < \cos x$

以上の証明から、$0 < x < \frac{\pi}{5}$の範囲で$y = \sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2}x^2}$のグラフは$y = \cos x$のグラフより常に下側にある。

《(ii)について》

$$R_n = \cos\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} \times \cos\frac{\pi}{5} \times \cos\frac{\pi}{6} \times \cos\frac{\pi}{7} \times \cdots \times \cos\frac{\pi}{n}$$

のうち、

$$\cos\frac{\pi}{5} \times \cos\frac{\pi}{6} \times \cos\frac{\pi}{7} \times \cdots \times \cos\frac{\pi}{n}$$

の部分を、(i)の結果を用いてこの値より小さい

$$\sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2} \times \left(\frac{\pi}{5}\right)^2} \times \sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2} \times \left(\frac{\pi}{6}\right)^2} \times \sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2} \times \left(\frac{\pi}{7}\right)^2} \times \cdots \times \sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2} \times \left(\frac{\pi}{n}\right)^2}$$

に置き換えて計算する。

$$\sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2} \times \left(\frac{\pi}{5}\right)^2} \times \sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2} \times \left(\frac{\pi}{6}\right)^2} \times \sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2} \times \left(\frac{\pi}{7}\right)^2} \times \cdots \times \sqrt{1 - \frac{16}{\pi^2} \times \left(\frac{\pi}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{16}{5^2}\right)\left(1 - \frac{16}{6^2}\right)\left(1 - \frac{16}{7^2}\right)\left(1 - \frac{16}{8^2}\right)\left(1 - \frac{16}{9^2}\right)\left(1 - \frac{16}{10^2}\right)\left(1 - \frac{16}{11^2}\right)\left(1 - \frac{16}{12^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{16}{n^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{5^2 - 16}{5^2} \times \frac{6^2 - 16}{6^2} \times \frac{7^2 - 16}{7^2} \times \frac{8^2 - 16}{8^2} \times \frac{9^2 - 16}{9^2} \times \frac{10^2 - 16}{10^2} \times \frac{11^2 - 16}{11^2} \times \frac{12^2 - 16}{12^2} \times \cdots \times \frac{n^2 - 16}{n^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(5+4)(5-4)}{5^2} \times \frac{(6+4)(6-4)}{6^2} \times \frac{(7+4)(7-4)}{7^2} \times \frac{(8+4)(8-4)}{8^2} \times \frac{(9+4)(9-4)}{9^2} \times \frac{(10+4)(10-4)}{10^2} \times \frac{(11+4)(11-4)}{11^2} \times \frac{(12+4)(12-4)}{12^2} \times \cdots \times \frac{(n+4)(n-4)}{n^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{9 \times 1}{5^2} \times \frac{10 \times 2}{6^2} \times \frac{11 \times 3}{7^2} \times \frac{12 \times 4}{8^2} \times \frac{13 \times 5}{9^2} \times \frac{14 \times 6}{10^2} \times \frac{15 \times 7}{11^2} \times \frac{16 \times 8}{12^2} \times \cdots \times \frac{(n+4)(n-4)}{n^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5 \times 6 \times 7 \times 8 \times (n-3)(n-2)(n-1)(n)}}$$

これより、

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5 \times 6 \times 7 \times 8 \times (n-3)(n-2)(n-1)(n)}} = \sqrt{\frac{1}{70}}$$

よって

$$\cos\frac{\pi}{5} \times \cos\frac{\pi}{6} \times \cos\frac{\pi}{7} \times \cdots \times \cos\frac{\pi}{n} > \sqrt{\frac{1}{70}}$$

以上の結果より

$$R_n = \cos\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{4} \times \cos\frac{\pi}{5} \times \cos\frac{\pi}{6} \times \cos\frac{\pi}{7} \times \cdots \times \cos\frac{\pi}{7} > \frac{1}{4\sqrt{35}}$$

３．考察

$y=\cos x$を$y=\sqrt{1-\frac{16}{\pi^2}x^2}$で下限値を取ることによって円に多角形を内接さしていくと、手計算で$\frac{1}{4\sqrt{35}}$よりも大きい値に収束することがわかった。

４．結論

円に多角形を内接していくと、0 でないある一定の正の数にとどまることから、無限に内接しても、0 に収束しないということがわかった。

５．参考文献ならびに参考 Web ページ

http://horibe.jp/PDFBOX/RoseProb.pdf ［バラの花びら」問題