

研究班番号【92】
ラングラーの問題について

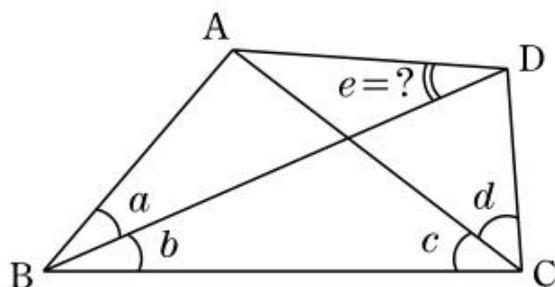
数学班: 垣畑 優月、松本 和貴

要約

本研究の目的は先行研究にある公式を用いてラングラーの問題をより簡単に解く方法を導出することである。研究によって、この公式は正確であり、これ以上激的に簡略化することは難しいということがわかった。従って本研究では、ラングラーの問題を公式を用いて解くのではなく、図形的に解く方が簡単と思われる。また、問題を作る側にとっては簡略化された公式を用いることで簡単に問題を作ることができるということが結論付けられた。

1. はじめに

ラングラーの問題とは、正方形ABCDに対角線を引き、点Eを対角線AC上に取る。角AEDをa、角BECをb、角CEDをc、角AEBをdとすると、角AEBをeと求める問題である。これは小中学生が受ける算数オリンピックに出題されており、小中学生には図形的な解法しかないが、高校で習う三角関数の公式を用いて解く方法も可能になるということに興味を持った。本研究では本校の先行研究で導出されていた公式の確認とより実用的にすることを目的とした。先行研究で導出されていた公式は下記である。



$$\tan e = \frac{\sin a \cdot \sin c \cdot \sin(b+c+d)}{\sin(a+b+c) \cdot \sin(c+d) - \sin c \cdot \sin(b+c+d) \cdot \cos a}$$

2. 研究方法

《公式の確認》

- ① Excelを用いて答えが出ている組み合わせを代入し、公式が合っているかを確認する。
- ② Excelを用いて公式を満たす組み合わせを推測する。
- ③ 推測した組み合わせから公式を満たす組み合わせを加法定理や積和の公式などを用いて手計算で確かめる。

《公式の簡略化》

加法定理などを用いて変形し、簡略化する。

3. 結果

《公式の確認》

(a,b,c,d,e)=(48,54,24,60,18)、(6,48,54,12,30)の2つの組み合わせは手計算で公式に当てはめることができた。

《公式の簡略化》

簡略化することで、もとの公式よりも角度を代入する部分を減らすことができた。ただ、三角比の和や積が多く、実用的になったとは言い難い。最も簡略化できた式が下記である。

$$\frac{1}{\tan e} = \frac{1}{\tan(b+c+d)} + \frac{\sin(a+b) \cdot \sin d}{\sin a \cdot \sin c \cdot \sin(b+c+d)}$$

4. 考察

《公式の確認》

すべての角度が、30°、45°、60°などの有名角(5の倍数)、または計算で求めることのできる18°を用いて計算できる角度で構成されている組み合わせは加法定理や合成などの三角関数の知識を用いれば手計算でも計算することができると考えた。

《公式の簡略化》

ラングラーの問題は、角度同士の関係などの条件がない限り、4つの記号が式の中にあることは変わらないので、もとの公式から激的に簡略化することは難しいと感じた。

5. 結論

公式の簡略化の際には計算を難しくする要因である三角比の和や積が多く残り、公式の確認の際には特定の組み合わせでしか手計算で求めることができなかった。この結果からラングレーの問題を手計算で解く際は公式を用いて解くよりは図形的に解く方が簡単だと思われる。しかし、問題を作る側にとっては簡略化された公式を用いることでより簡単に問題を作ることができる。今後は有名角または 18° を用いた角度以外で手計算で計算できる組み合わせを探す。そして、角度同士の関係など条件下での公式を簡略化する。

6. 参考文献ならびに参考Webページ

- 平成30年度 高津LCⅢ研究論文 番号21「ラングレーの問題について」
<https://kozu-osaka.jp/cms/wp-content/uploads/2019/02/5104d61ea17417a39109ae4c942d80ec.pdf>
- 『ラングレーの問題にトドメをさす！～4点の作る小宇宙完全ガイド～』斎藤浩(現代数学社)
- ラングレーの問題の初等幾何による証明12選+ α (現代数学社)
<https://www.gensu.co.jp/saito/challenge/langley.html>