

# ある立体の展開図から異なる立体が折れるとき その逆操作によってもとの立体は折れるのか

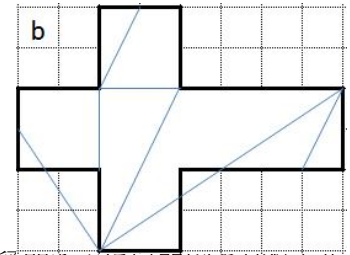
数学班: 堀井 悠生、牧野 司

## 要約

本研究の目的は、数学における展開図という未だ多くの謎に満ちた分野の研究を少しでも前進させることを目的として行われた。なお、ここでの前進とは不明であった内容が証明を得て明らかになることを意味する。

### 1. はじめに

まず、立方体を辺に沿って展開したものを、うまく折ることで四面体を折ることができると知られている。このことから、一つの疑問が湧き上がった。それは、ある立体(A)を辺に沿って展開したとき、それから別の立体(B)を折ることが可能であれば立体(B)から立体(A)、すなわち逆操作が可能などときはあるのかというものである。



そして、これらの操作をそれぞれ操作(A)→(B)、逆操作(B)→(A)として、疑問を主に展開図の種類と共通の展開図の2つの観点から解決を試みた。

この研究では、立体(A)、立体(B)はそれぞれ単面体を想定する。単面体とは、立体を構成するすべての面が同一の図形である立体を指す。

### 2. 研究手法

二種類の展開図を導入する。辺展開図と、一般展開図。辺展開図は辺に沿って展開されたものを指し、一般展開図は展開するときに定められる決まりはなく、立体を構成する面上に展開図の外枠が通るものを指す。また、これらはいずれもひと繋りの図形である。展開図を見ると、私達がよく目にするのは辺展開図で展開図の外枠が展開前の立体の辺となっている。

また、共通展開図を導入する。共通展開図とは、その展開図から2つ以上の複数の立体を折ることができる展開図のことである。

p2タイリングという考えを導入する。p2タイリングとは、すべての面が同じ図形で構成された立体の展開図と、それを180°回転させた合同な図形を平面を埋め尽くすように敷き詰めたものである。ただし、敷き詰めることが可能な図形は限られている。

仮説「操作(A)→(B)が成り立つとき、立体(A)のほうが立体(B)よりも面の数が多い」、「2つの単多面体において片方の立体の一般展開図からもう一方の立体が折れるとき、展開した立体のほうがもう一方の立体よりも面を多く持たなくてはならない。」の2つの説立証を目標に実験を行う。

#### 《実験1》

①仮説「操作(A)→(B)が成り立つとき、立体(A)のほうが立体(B)よりも面の数が多い」について面積に注目して考える。

②操作(A)→(B)が成り立つとき、立体(A)と立体(B)は外枠を立体(A)の辺展開とする共通展開図を持つといえる。このことから、立体(A)の表面積と立体(B)の表面積、すなわち展開図の面積が等しく、立体において一つの頂点に接続する面の角度の和が360°よりも小さいため、操作(A)→(B)では立体の頂点の数が減少、または同数と考えられた。

したがって、操作(A)→(B)では、

$$\text{立体(A)の面の数} \geq \text{立体(B)面の数} \text{--- (i)}$$

#### 《実験2》

①p2タイリングを用いる。p2タイリングの元となる立体の展開図を回転させて平面を埋めるときに、その回転の中心である点と点をそれぞれ結んでできる図形は元の立体とは異なる立体の展開図であることが知られている。単面体の展開図がタイリング可能であるときその面は、すべて三角形もしくは四角形であるから回転の中心は4点に収まることがわかる。これは、展開された立体の展開図から折ることのできる立体は四面体ということである。

したがって、(i)により操作(A)→(B)の逆操作(B)→(A)はp2タイリングを用いた方法では行えないことになる。

②逆操作(B)→(A)は立体(B)の一般展開図から立体(A)を折るため、展開した立体(B)の一つの面の内部と立体(A)の頂点となる点すなわち立体(A)のどれか一つの面の頂点が重なってはいけないことから単多面体間での逆操作(B)→(A)が可能ならば、立体(A)の頂点に当たる部分が立体(B)の辺もしくは頂点と重なる必要であるといえる。

### 3. 結果

上記の実験により分かった逆操作(B)→(A)が可能ならば、立体(A)の頂点に当たる部分が立体(B)の辺もしくは頂点と重なる必要であるという条件において、(i)と立体における面、辺、頂点の数の関係から単多面体間における逆操作(B)→(A)は行えない事がわかる。

また、これらすべての条件を満たすということはすなわち立体(A)の一般展開図が立体(B)の一般展開図となるということであり、三角形に内接する正方形とその面積より、そのような立体は少なくとも立方体を含む組み合わせ内には存在しないといえるから、立方体を組み合わせに含む立体間ではいかなる立体においても逆操作(B)→(A)は行えないことが分かる。

### 4. 考察

立体(A)の一般展開図が立体(B)の一般展開図となり、一方の立体が立方体であるとき三角形に円が包括されるための条件で課せられる直径の長さを立方体の一つの面の対角線の長さで置き換えて正方形の一つの辺がもう一方の立体の一つの辺すなわち三角形の一つの辺と重なるときを考慮することによってもこの結果は導き出される。

また、今回用いた研究手法から立体が凸多面体、凹多面体のどちらであってもこれは成り立つといえる。

### 5. 結論

本研究において操作(A)→(B)の逆操作(B)→(A)は正方形を含む組み合わせではいかなる単面体同士でも行うことができないと分かった。

今後の研究発展について、単面体以外の組み合わせではどうなるのかについては開拓の余地が残されている。しかし、その場合p2タイリングは適応できず、さらなる進展は本研究で用いた手法とは全く異なった手法を用いなくてはならないと思われる。

### 6. 参考文献ならびに参考Webページ

「展開図とそこから折れる凸立体の研究」、「三角形に内接する正方形」