研究班番号【89】

代数的に解ける 5 次方程式について ～Gauss の方法を用いて～

数学班：山佐　百合香　　出山　陽登

要約

5 次以上の方程式は、一般的に代数的には解けない（方程式の係数から加減乗除とn乗根だけで解を表現できない）ことが知られているが、特別な場合は解けることがある。有名な例として $x^n=1$があある。本論文では、$x^n=1$(nは自然数)が代数的に解けることを証明したガウスの方法をレビューする。

1．ガウスの方法による証明

①$n=5$の場合($x^5-1=0$が代数的に解けることの証明)

$x^5-1=0$は、$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$と因数分解できる。$x^4+x^3+x^2+x+1=0$の4つの解の1つをxとすると、他の解はx^2,x^3,x^4とかける。ここで「ラグランジュの分解式」と呼ばれる次の4つの量をつくる。

$$u(x)=x+i(x^2)^1+i^2(x^2)^2+i^3(x^2)^3$$
$$u(x^2)=x^2+i\{(x^2)^2\}^1+i^2\{(x^2)^2\}^2+i^3\{(x^2)^2\}^3$$
$$u(x^3)=x^3+i\{(x^3)^2\}^1+i^2\{(x^3)^2\}^2+i^3\{(x^3)^2\}^3$$
$$u(x^4)=x^4+i\{(x^4)^2\}^1+i^2\{(x^4)^2\}^2+i^3\{(x^4)^2\}^3$$

$x^5=1$であることを用いると、

$$u(x)=x+ix^2+i^2x^4+i^3x^3$$
$$u(x^2)=x^2+ix^4+i^2x^3+i^3x=i^3u(x)$$
$$u(x^3)=x^3+ix+i^2x^2+i^3x^4=iu(x)$$
$$u(x^4)=x^4+ix^3+i^2x+i^3x^2=i^2u(x)$$

が成り立つ。したがって、

$$\{u(x)\}^4=\frac{1}{4}[\{u(x)\}^4+\{u(x^2)\}^4+\{u(x^3)\}^4+\{u(x^4)\}^4]$$

という量を考えると、この右辺は、4 つの解x,x^2,x^3,x^4の対称式である。「対称式は、基本対称式の加減乗除で表わされる」という「対称式の基本定理」から、$u(x)$の 4 乗は、4つの解x,x^2,x^3,x^4の基本対称式を

$$\begin{cases}P=x+x^2+x^3+x^4\\Q=x\cdot x^2+x^2\cdot x^3+x^3\cdot x^4+x^4\cdot x\\R=x\cdot x^2\cdot x^3+x^2\cdot x^3\cdot x^4+x^3\cdot x^4\cdot x+x^4\cdot x\cdot x^2\\S=x\cdot x^2\cdot x^3\cdot x^4\end{cases}$$

とすると、P,Q,R,Sの加減乗除で表せることがわかる（解と係数の関係より、$P=-1,Q=1,R=-1,S=1$である)。こうして、$u(x)$の 4 乗は、P,Q,R,Sから代数的に表せることがわかった。

次に、$u(x)=x+ix^2+i^2x^4+i^3x^3=a$ とし、iをi^2, i^3,i^4に置き換えた式

$$u(x)'=x+i^2x^2+x^4+i^2x^3=b$$
$$u(x)''=x+i^3x^2+ix^4+ix^3=c$$
$$u(x)'''=x+x^2+x^4+x^3=-1(\text{解と係数の関係})$$

を作る。$i+i^2+i^3+i^4=0$であることを用いると、

$$4x=a+b+c-1 \qquad \therefore x=\frac{1}{4}(a+b+c-1)$$

$a\big(=u(x)\big)$がP,Q,R,Sから代数的に表せたのと同様に、b,cも代数的に表わすことができる。

よってxもP,Q,R,Sから代数的に表せることがわかった。

②一般の場合($x^n-1=0$が代数的に解けることの証明)
数学的帰納法により示すことができる。
ⅰ)$n=2$のとき、$x^2-1=0\ \therefore x=\pm 1$
ⅱ)nが2より大きい素数のとき、nより小さい素数に対しては代数的に解けると仮定して、nのときも代数的に解けることを示す。

〈補足1〉$x^5-1=0$の解
この解をx_1,x_2,x_3,x_4,x_5とすると、$(x_1)^5=(x_2)^5=(x_3)^5=(x_4)^5=(x_5)^5=1$となる。ド・モアブルの定理$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ から考えると、$n=5$のときに右辺が 1 になればよいので、$\cos 5\theta+i\sin 5\theta$を満たす複素数平面上の座標と$x^5-1=0$の解が対応関係にあるので、ここからより簡略化した形で表されると考えられる。よって、$\theta=0,\frac{2}{5}\pi,\frac{4}{5}\pi,\frac{6}{5}\pi,\frac{8}{5}\pi$となる複素数平面上の 5 点になる。このように、複素数平面上において、$x^n-1=0$の解は半径 1 の円周をn等分する点に現れる。

〈補足 2〉ラグランジュの分解式
ラグランジュによって示された、解の関係式のことである。研究内では、3次方程式の解の公式を導出する中でこの方法を知ったので、ここではその導出法を通して分解式を紹介する。

分解式を用いた3次方程式の解の公式の導出

$x^3+px+q=0$について、解をx_1,x_2,x_3とする。
(x^2の項がない理由は、どのような3次方程式でも立方完成することでx^2の項を消去できるからである(チルンハウス交換))
解と係数の関係より

$$x_1+x_2+x_3=0\cdots① \quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=p\cdots② \quad x_1x_2x_3=-q\cdots③$$

ここで、3 つの解x_1,x_2,x_3と 1 の 3 乗根ωを組み合わせた次のような量を作る。

$$\begin{cases} R_1=x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3 \\ R_2=x_3+\omega x_1+\omega^2 x_2 \\ R_3=x_2+\omega x_3+\omega^2 x_1 \\ R_4=x_1+\omega x_3+\omega^2 x_2 \\ R_5=x_2+\omega x_1+\omega^2 x_3 \\ R_6=x_3+\omega x_2+\omega^2 x_1 \end{cases}$$

$1+\omega+\omega^2=0$であることと①に注意すると、$R_1+R_4=3x_1 \therefore R_1,R_4$が求まれば、解$x_1$を求めることができる。さて$R_1$~$R_6$は、1, ω, ω^2に 3 つの解x_1,x_2,x_3を配置しているので 6 通りの量ができている。しかしここで、$\omega^3=1$であることを用いると、

$$R_2=\omega R_1, R_3=\omega^2 R_1, R_5=\omega R_4, R_6=\omega^2 R_5$$

よって

$$(R_1)^3=(R_2)^3=(R_3)^3, \qquad (R_4)^3=(R_5)^3=(R_6)^3$$

が成り立つ。$\therefore (R_1)^3+(R_4)^3$および$(R_1)^3(R_4)^3$は、3 つの解$x_1,x_2,x_3$の対称式であることがわかる。したがって対称式の基本定理から$(R_1)^3+(R_4)^3$および$(R_1)^3(R_4)^3$は、p,qから代数的に表わすことができる。

$\therefore R_1,R_4$もp,qから代数的に表わすことができ、解x_1も代数的に表わされる。(3次方程式の解の公式)

２. 考察

対称式の考え方を用いるとどうしても複雑な証明になってしまう。この研究を進めていく　中で、数学Ⅲの複素数平面の考え方を用いると$X^n = 1$のn個の解は三角関数および虚数iを用いて表すことができ、複素数平面上において原点を中心とした半径1の円周上に解が配置されることを知った。これをうまく用いることでもう少しわかりやすく証明できるのではないかと考えた。

３． 結論

今回の研究では、対称式の考え方を発展させたラグランジュの分解式の考え方を用いて証明したが、この考え方自体がとても天才的な発想であり、考察にも記載したように複素数平面を用いるこ　とで図形的イメージも湧くため、今後は複素数平面の分野からもう少し簡単にわかりやすく伝えていくために研究をしていく。

４. 参考文献ならびに参考 Web ページ

矢ヶ部　巌(1976)　『数Ⅲ方式　ガロアの理論　アイデアの変遷を追って』現代数学社