研究班番号【91】

整数を「ふりまわす」教科書

数学班：本田光輝　徳山力基　長尾拓弥

要約

整数問題は理解が困難であるが、大学の入試問題に頻出であることを知った。授業を一通り受けたものの、整数分野の入試問題を解くには力が不足していることが分かった。私達の整数への理解を深めると共に、多くの人に還元するため、多くの入試問題を解き、複数の教科書と参考書を読み比べ、整数問題を「ふりまわす」ことができる程、簡単に解ける教科書を作成した。

1．はじめに

私達は初めに、研究目標を定めた。そして、その目標を達成することができるような研究を行うことにした。私達が立てた目標は「自分のためにも、人のためにも」というものである。その理由として、まず「自分たちのためにも」とあるが、これは高校二年生の一年間を通じた長期的な研究なので、何かしらの形で自分たちの成長を期待できるものにしたいと考えたからだ。また、「人のためにも」とは、私達の研究が世界の誰かの役に立つものになってほしいという願いのもと定めた。

この研究目標のもと、研究する題材を探し「整数の教科書を作る」というものに定めた。この動機としては、私達は数学班になり、数学に関して「自分のためにも」に値するものを班内で話し合った。その結果、単純明快に、数学力（高校範囲で）をつけたいということになった。数学力をつけるということは、自分の得意な分野をより伸ばすか、自分たちの苦手とする分野を少しでも得意にするか、という2つの意味として捉えることとする。偶然にも、苦手とする分野が「整数」と班内で一致していたため、後者の数学力をつけることにした。よって「整数」を研究することになった。次に「人のためにも」に値するものを話し合った。「人」の定義を高校生として、高校生がよく使い、自分たちの研究を事細かに知らせることができるものは何か、と考えたとき「教科書」が一番適していると考えた。よって「教科書」をつくることになった。以上の事により「整数の教科書」を作成するという研究をすることになった。

（「教科書」のタイトルとしてある「ふりまわす」の由来ですが、「ふりまわす」という言葉のイメージとして、自由にものを扱うということがあります。例えば「武器をふりまわす」という言葉を聞いたとき、頭の中で変幻自在に武器を使う人を思い浮かべるのではないでしょうか。このように「整数」の分野を自由に扱うことができるような教科書という思いを込めて名付けました。）

2．研究手法

いきなり「整数の教科書」を作ろうとしても、指標も構成も何もかもが不鮮明であった。そのためまず自分たちの教科書の位置づけをすることにした。少し極端な例であるが、世の中には「教科書だけで高校数学は簡単に完璧に理解できる。」という意見と「教科書は丁寧であるが、教科書で学ぶより参考書を用いたほうが理解しやすい」という意見を耳にすることが多くあったので、教科書と参考書との良し悪しを確かめる意味も込めて、教科書と参考書を読み比べ、構成する上で重きを置きたいことを見つけ出すことにした。そして、この研究の指標を「ある程度は入試問題を解ける教科書」と設定し、入試問題を解くために、入試問題を分担して解くことにした。

まとめると、手順としては以下の3つである。

ⅰ　教科書を読む
ⅱ　参考書を読む
ⅲ　入試問題を解く

3．結果

教科書は、問題文の後に解説が記載されており、ページ数も少なく、簡潔にまとめられている。
また、整数の章の中でも、教科書の出版社により、単元の順番が若干変動していたり、ある出版社の教科書では記載されている事項が、他の出版社の教科書には記載されていなかったりした。

参考書は問題文と解説の間に、その問題における重要事項[1]が記載されている。参考書にも、教科書と同様の出版社による差異が認められた。

4. 考察

初めに、3社の教科書を比較した結果をもとに考察を述べる。

教科書は文部科学省が規定した学習指導要領に則って作成されるため、教科書の出版社によって記載されている単元に大きな違いはないと考えた。しかし、学習指導要領に規定されていない発展的な内容の有無や記載内容の順序などは教科書によって異なっていた。これは各教科書出版社の執筆者による思惑があるからだと考えた。

次に、参考書と教科書を比較した結果をもとに考察を述べる。

参考書では、教科書に比べ問題、解答、解説などの量が圧倒的に多く、問題を解く際のポイントや入試でよく問われるような点などが詳しくまとめられており、また、そのポイントはある問題ごとにのみ当てはまるものではなく、他の問題やより発展的な問題にも対応しているということがわかった。これらのことから、参考書は言葉の意味や定義をある程度理解した人が入試問題などの初見の問題で点数を取ることができるようにすることを目的としていると考えた。

一方、教科書では定義や説明などの後に図形やグラフを用いた具体例が示されており、情報が詳しくまとめられていた。しかし、問題を解く際のポイントや入試でよく問われるような点といったものが記載されているものの、参考書ほど強調して説明されていなかった。これらのことから、教科書は参考書と比べて、入試問題などの初見の問題で点数を取ることを目的としておらず、言葉の意味や定義の深い理解を促すことを目的としていると考えた。また、教科書の読者自身が、簡潔にまとまった状態の教科書の文章から、他の問題にも当てはまるようなポイント、共通性などを発見したり推測したりする論理的思考力を養うことも目的としていると考えた。

5. 結論

3.結果や4.考察、入試問題から抽出した重要事項を基に、問題ごとのポイントや、そのポイントの活かし方といったものを詳しく説明したり、より発展的な演習問題を増やしたりして『整数を「ふりまわす」教科書』を作成した。次ページからがその作成した教科書である。

---

[1] 重要事項は、参考書により名称が異なっている。NEW ACTION LEGEND Ⅰ+Aでは思考のプロセスやActionと呼ばれている一方、Focus Gold数学Ⅰ+AではFocusと呼ばれている。

数学A　整数

Ⅰ 約数と倍数

ⅰ *定義*

ⅱ *例題*

ⅲ *練習問題*

Ⅱ 方程式

ⅰ *整数の割り算*

ⅱ *剰余類*

ⅲ *不定方程式*

Ⅲ 発展

ⅰ *フェルマーの小定理*

ⅱ *鳩の巣原理*

Ⅰ 約数と倍数

整数問題は、

受験生の君の前にきっと立ちはだかるだろう。
そんな時には、この**教科書**を使ってほしい。
なぜならこの**教科書**は君と同じような悩みを持つ、
とある高校生**3人**が君のために頭を悩まし、
時間を割いて**熟成**させたものだから。
Ⅰ章では、**整数問題**の**土台**を作り、
Ⅱ章、Ⅲ章を通して、**ポイント**をその**土台**の上に、
コツコツ積み重ねていってほしい。
受験生に幸あれ、

1章　約数と倍数

1. 定義　　太字は重要事項。青字は補足説明。

2つの整数a,bについて、ある整数kを用いて、

$$a = bk$$

と表されるとき、bはaの約数であるといい、aはbの倍数であるという。

$a = bk$ より、$a = (-b)(-k)$だから、bがaの約数ならば、$-b$もaの約数である。

6の約数は$1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6$である。
$-1, -2, -3, -6$も約数であることに注意。

2以上の自然数で、1とそれ自身以外に正の約数を持たない数を素数という。
2以上の自然数で、素数以外の数を合成数という。

整数がいくつかの整数の積で表されるとき、積を作る1つ1つの整数を、
もとの整数の因数といい、素数である因数を素因数という。
自然数を素数だけの積の形に表すことを素因数分解という。

$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ である。
1は素数でないことに注意。

倍数判定法を知っていると、楽に素因数分解ができることがある。

2の倍数判定法・・・1の位が偶数
3の倍数判定法・・・各位の数の和が3の倍数
5の倍数判定法・・・1の位が5の倍数
7の倍数判定法・・・下1桁を抜いた数から下1桁の数の2倍を引くこと
　　を繰り返しても7の倍数

倍数判定法を知らないから解けない、という問題はない。

2つ以上の整数に共通な約数を、それらの整数の公約数といい、公約数のうち、
最大のものを最大公約数という。
2つ以上の整数に共通な倍数を、それらの整数の公倍数といい、公倍数のうち、
最小のものを最小公倍数という。

素因数分解を用いると、最大公約数や最小公倍数を求められる。
72と240の最大公約数、最小公倍数
$72 = 2^3 \times 3^2$ 、 $240 = 2^4 \times 3^1 \times 5^1$
最大公約数・・・指数の小さい方を選ぶ　∴ $2^3 \times 3^1 \times 5^0 = 24$
最小公倍数・・・指数の大きい方を選ぶ　∴ $2^4 \times 3^2 \times 5^1 = 720$

2つの整数a, bの最大公約数が1であるとき、a, bは互いに素であるという。

9と14は最大公約数が1だから、互いに素である。

2．例題　　青字は重要ポイント、赤字は解説。

定義に加えて、入試問題に頻出ポイントを学習し、教科書＋αの知識を蓄え、
「3．練習問題」や、入試問題に備える。

例題1
$xy + 4x - y = 6$を満たす整数x,yの組を求めよ。

ポイント　因数分解→積の形にもっていく。
　　表を用いて、候補を洗い出す。

解説　　与えられた等式より、$xy + 4x - y - 4 + 4 = 6$　　→ $-4+4$について後述

$\therefore (x-1)(y+4) + 4 = 6$

$(x-1)(y+4) = 2$

$x-1$	-2	-1	1	2
$y+4$	-1	-2	2	1

$\therefore (x-1, y+4) = (-2,-1), (-1,-2), (1,2), (2,1)$

答.$(x, y) = (-1,-5), (0,2), (2,-2), (3,-3)$

～補足～
生徒：1行目の式変形が思いつきません。天才的な発想ですか。

先生：これは因数分解の準備のようなものです。式中の「$xy + 4x - y$」を見て、
「$(x-1)(y+4)$」と因数分解できると発想できると、式に-4を加えたくなり、
帳尻合わせに$+4$を加えたくなるのです。天才的というより、経験値です。

生徒：経験値ですか。。。

先生：それほど焦ることはありません。2,3回経験を積めば、身につきます。
整数の単元、数学という教科はこのようなスキルを1つずつ身につけていくことが
数学力向上に繋がります。

例題2

504の正の約数の個数を求めよ。

ポイント　自然数Nを素因数分解した結果が$N = p^a q^b r^c \cdots$のとき、
Nの正の約数の個数は　$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots$と表される。

解説　504を素因数分解すると、$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
504の正の約数の個数は、$(3+1)(2+1)(1+1) = 24$　　答．24個

例題3

a, kを整数とする。$4a = 3k - 72$を満たすとき、kが4の倍数であることを示せ。

ポイント　a, b, kは整数、a, bが互いに素で、$a = bk$のとき、
kはaの倍数である。
因数分解→積の形にもっていく。

解説　与えられた等式より、$3k = 4a + 72$
$3k = 4(a+18)$
このとき、3と4は互いに素だから、kは4の倍数。

例題4

最大公約数が15、最小公倍数が180である2つの自然数a, bの組をすべてもとめよ。
ただし、$a < b$とする。

ポイント　最大公約数、最小公倍数の性質
2つの自然数a, bの最大公約数をg、最小公倍数をlとする。
$a = ga'$、$b = gb'$であるとすると、
a', b'は互いに素、$l = ga'b'$、$ab = gl$が成り立つ。

解説　最大公約数が15だから、$a = 15a', b = 15b'$
$(a', b'$は互いに素である自然数で、$a' < b')$
このときa, bの最小公倍数は$15a'b'$と表されるから、
$15a'b' = 180$　すなわち　$a'b' = 12$
よって、$(a', b') = (1, 12), (3, 4)$
答. $(a, b) = (15, 180), (45, 60)$

例題5

x, y, zは自然数で、$x < y < z$である。$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$を満たす$x, y, z$の値を求めよ。

ポイント　$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$のとき、$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{c}$と、上からおさえる。

解説　$x < y < z$より、$\frac{1}{z} < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{3}{x}$　よって、$x < 3$

(ⅰ)$x = 1$のとき、$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

このとき、$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0$より、等式を満たす$y, z$の組はない。

(ⅱ)$x = 2$のとき、$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{2}{y}$　よって$y < 4$ また、$x < y$より、$y = 3$

よって、$\frac{1}{3} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$　　$z = 6$

以上より、答.$(x, y, z) = (2, 3, 6)$

3．練習問題

「2．例題」で学んだポイントを整理して身につけるとともに、
活用する練習をして、定期考査や入試問題に備える。

練習問題1

nを自然数とする。$\sqrt{4n^2 + 165}$ が自然数となるようなnは何通りあるか。
また最大のnを求めよ。

ポイント　因数分解→積の形にもっていく。
表を用いて、候補を洗い出す。
「(与式)が～となる」→(与式) $= a$と置く。aのとりうる値の範囲に注意。

解説　$\sqrt{4n^2 + 165} = a$とすると、(aは自然数)

$a > 0$ より、$4n^2 + 165 = a^2$　　$\therefore a^2 - 4n^2 = 165$

$(a + 2n)(a - 2n) = 165$　また$a + 2n > a - 2n$より、

$a + 2n$	165	55	33	15
$a - 2n$	1	3	5	11

表より、$(a + 2n) - (a - 2n)$をして、
$4n = 164, 52, 28, 4$　　$\therefore n = 41, 13, 7, 1$
答. 4通り、最大のnは41

表を使った後は、文字が消えるように、
上一下や上＋下をする。表を使うことで、
この操作が楽になる。

練習問題2

nを整数とする。$\sqrt{n^2-8n+1}$が整数となるnは何個あるか。また最大のnを求めよ。

ポイント　平方完成で一次の項を消して、積の形にもっていく。
表を用いて、候補を洗い出す。
「(与式)が～となる」→(与式) $=a$と置く。aのとりうる値の範囲に注意。

解説　$\sqrt{n^2-8n+1}=a\ (a\geq 0)$　　$\therefore n^2-8n+1=a^2$

$(n-4)^2-a^2=15$　$\therefore (n-4+a)(n-4-a)=15$

$n-4+a>n-4-a$ より、

$n-4+a$	15	5	-3	-15
$n-4-a$	1	3	-5	-1

表より、$(2n-8,2a)=(16,14),(8,2),(-8,2),(-16,14)$

$(2n,2a)=(24,14),(16,2),(0,2),(-8,14)$

$(n,a)=(12,7),(8,1),(0,1),(-4,7)$

答.4個、最大のnは12

練習問題3

x,yを自然数とする。$1<x<y$のとき、$(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})=\frac{5}{3}$を満たす$x,y$の組をすべて求めよ。

ポイント　因数分解→積の形にもっていく。
表を用いて、候補を洗い出す。

解説　$\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+1=\frac{5}{3}$　$x>0,y>0$より、$xy>0$だから、**両辺にxyをかけて、**

$\frac{2}{3}xy-x-y-1=0$ 両辺に$\frac{3}{2}$をかけて、$xy-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}=0$

$(x-\frac{3}{2})(y-\frac{3}{2})=\frac{15}{4}$ 両辺に4をかけて、$(2x-3)(2y-3)=15$

$2y-3>2x-3$より、

$2y-3$	15	5
$2x-3$	1	3

表より、$(2x-3,2y-3)=(1,15),(3,5)$

よって、答.$(x,y)=(2,9),(3,4)$

練習問題4

a, b, cを自然数とする。$a \geq b \geq c$のとき、$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c}) = 2$を満たす$a, b, c$の組を求めよ。

ポイント $a \geq b \geq c$のとき、$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c}) \leq (1+\frac{1}{c})^3$

因数分解→積の形にもっていく。

表を用いて、候補を洗い出す。

解説 $a \geq b \geq c > 0$より、$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$だから、

$2 = (1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c}) \leq (1+\frac{1}{c})^3$ よって、$2 \leq (1+\frac{1}{c})^3$

$c = 1, 2, 3$のとき、これを満たす。$c = 4$のとき、$(1+\frac{1}{4})^3 = \frac{125}{64} < 2$となり、これを満たさない。**このとき、$(1+\frac{1}{c})^3$は単調減少だから、$c \geq 4$のときは$2 > (1+\frac{1}{c})^3$となる。**

(ⅰ) $c = 1$のとき、

$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b}) = 1$より、 $1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab} = 1$だから、$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab} = 0$

このとき、$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab} > 0$より、これを満たす$a, b$は存在しない。

(ⅱ) $c = 2$**のとき、**

$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b}) = \frac{4}{3}$より、$ab > 0$より、$\frac{1}{3}ab - a - b - 1 = 0$

両辺を3倍して、$ab - 3a - 3b - 3 = 0$ **だから、**$(a-3)(b-3) = 12$ また$a - 3 \geq b - 3$より、

$a-3$	12	6	4
$b-3$	1	2	3

$(a-3, b-3) = (12, 1), (6, 2), (4, 3)$**より、**$(a, b, c) = (15, 4, 2), (9, 5, 2), (7, 6, 2)$

(ⅲ) $c = 3$のとき、(ⅱ)と同様にして、$(a, b, c) = (8, 3, 3), (5, 4, 3)$

以上より、答.$(a, b, c) = (15, 4, 2), (9, 5, 2), (7, 6, 2), (8, 3, 3), (5, 4, 3)$

Ⅱ　余

ⅰ　余り
ⅱ　剰余
ⅲ　不定方程式

第Ⅰ章では約数と倍数について学んだ

第Ⅱ章では整数を割った余りや

条件を満たす数を求める方法を学ぶ

整数の割り算

【1】 整数 aと正の整数bに対して

$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$ （q:aをbで割った**商**、r:aをbで割った**余り**）

を満たす整数qとrがただ一通りに決まる。

$r = 0$のときaはbで割り切れる　$r \neq 0$のときaはbで割り切れない

例　51＝11×4＋7 だから、51を11で割った商は4、余りは7

$-34 = 5\times(-7)+1$だから、-34を5で割った商は−7、余りは1

例題1　整数a, bについて、aを5で割ると2余り、bを5で割ると4余る。

このとき、(1)$a+b$　(2)$a-b$　(3)ab　の余りを求めよ。

（解答）　条件より、$a = 5m + 2$, $b = 5n + 4$(m, nは整数)と表される。　← i

(1)$a + b = (5m + 2) + (5n + 4) = 5(m + n + 1) + 1$

m, nは整数だから、$m + n + 1$も整数。 よって、$a + b$を5で割った余りは　1

(2)$a - b = (5m + 2) - (5n + 4) = 5(m - n - 1) + 3$　← ii

m, nは整数だから、$m - n - 1$も整数。 よって、$a - b$を5で割った余りは　3

(3)$ab = (5m + 2)(5n + 4) = 25mn + 20m + 10n + 8 = 5(5mn + 4m + 2n + 1) + 3$

m, nは整数だから、$5mn + 4m + 2n + 1$も整数。 よって、abを5で割った余りは　3

補足

i ･･･aを5で割った商とbを5で割った商は異なるので、異なる文字でおく。

ii ･･･割り算の余りは0以上であることに注意する。

$a - b = 5(m - n) - 2, 5(m - n + 1) - 7$のように変形して、余り -2、-7 としない。

例題2　a, $a^2 + b$(a, b:正の整数)を5で割った余りがそれぞれ2,3のとき、bを5で割った余りを求めよ。

（解答）条件より、$a = 5m+2$･･･①,　$a^2 + b = 5n + 3$･･･②　(m, nは整数)と表せる。

②に①を代入すると、$(5m + 2)^2 + b = 5n + 3$

$$b = 5n + 3 - (25m^2 + 20m + 4)$$

$$=5(-5m^2 - 4m + n - 1) + 4$$

m, nは整数だから、$-5m^2 - 4m + n - 1$も整数

よって、bを5で割った余りは　4

例題3　(1)1833を割ると13余り、2048を割ると18余る自然数をすべて求めよ。
(2)36, 54, 90のいずれで割っても19余る自然数のうち、
2000に最も近い自然数を求めよ。

（解答）

（1） 求める自然数をnとする。　←i

nで1833を割ると13余るので$n \geq 14$であり、$1833 - 13 = 1820$はnで割り切れる。

↑ii

nで2048を割ると18余るので、$n \geq 19$であり、$2048 - 18 = 2030$はnで割り切れる。

よって、nは1820と2048の公約数で、$n \geq 19$である。

$1820 = 2^2 \times 5 \times 7 \times 13$　$2030 = 2 \times 5 \times 7 \times 23$だから、

1820と2030の最大公約数は、$2 \times 5 \times 7 = 70$

nは最大公約数である70の約数なので、　←iii

$n \geq 19$を満たすのは$n = 70, 35$

（2）求める自然数をnとする。

条件より、$n = 36p + 19$, $n = 54q + 19$, $n = 90r + 19$だから、

$n - 19 = 36p$, $n - 19 = 54q$, $n - 19 = 90r$

よって、$n - 19$は36, 54, 90の公倍数

$36 = 2^2 \times 3^2$, $54 = 2 \times 3^3$, $90 = 2 \times 3^2 \times 5$より36, 54, 90の最小公倍数は、

$2^2 \times 3^3 \times 5 = 540$　よって、$n - 19 = 540k$（kは整数）と表せる。　←iv

よって、$n = 540k + 19$

$k = 3$のとき、$n = 540 \cdot 3 + 19 = 1639$

$k = 4$のとき、$n = 540 \cdot 4 + 19 = 2179$

よって、2000に最も近い自然数は　2179

補足

i ･･･求める数を文字で置く

ii ･･･【1】$a = bq + r$なので、$a - r = bq$

割られる数と余りの差$a - r$は、割る数bの倍数

iii ･･･公約数は最大公約数の約数である

iv ･･･公倍数は最小公倍数の倍数である

剰余類

【2】　正の整数mについて、すべての整数nは
mk, $mk+1$, $mk+2$, ……, $mk+(m-1)$　(kは整数)のいずれかで表せる。
ある整数mの倍数になることを証明したいとき、
mで割った余りで分類してそれぞれの場合を調べるとよい

例1　整数kを用いて、すべての整数を3で割った余りで分類する
3で割った余りが0→$3k$，3で割った余りが1→$3k+1$
3で割った余りが2→$3k+2$または$3k-1$

k	⋯	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$3k$	⋯	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15
$3k+1$	⋯	-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16
$3k+2$	⋯	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14	17

※整数を3で割った余りは0か1か2なので、上の表のように3で割った余りが
0，1，2の3つのグループにすべての整数を分類することができる。

例2　整数kを用いて、すべての整数を2で割った余りで分類する
2で割った余りが0(偶数)→$2k$　　2で割った余りが1(奇数)→$2k+1$

例題4　$N=2n^3+3n^2+n$(n:整数)が6の倍数であることを証明せよ。

(解答)　Nが6の倍数 ⇔ Nが2の倍数かつNが3の倍数

$N=n(2n^2+3n+1)=n(n+1)(2n+1)$
$n(n+1)$は2連続整数の積なので、Nは2の倍数　　← i
(ア)$n=3k$(k:整数)のとき　　← ii
$N=3k(3k+1)(2\cdot 3k+1)$
(イ)$N=3k+1$(k:整数)のとき
$N=(3k+1)(3k+2)(6k+3)=3(3k+1)(3k+2)(2k+1)$
(ウ)$N=3k+2$(k:整数)のとき
$N=(3k+2)(3k+3)(6k+5)=3(3k+2)(k+1)(3k+5)$
kは整数なので、(ア)～(ウ)いずれの場合もNは3の倍数
よって、Nは6の倍数

補足

i ⋯偶数と奇数は交互に並んでいるので、2連続の整数の積には必ず偶数が一つ含まれる。
よって、2連続整数の積は偶数となる
ii ⋯Nが3の倍数であることを示したいので、整数nを3で割った余りで分類してみる

例題5　5つの数 p, $2p+1$, $4p-1$, $6p-1$, $8p+1$が
いずれも素数となる自然数pをすべて求めよ。

（実験）pは素数ということを利用して小さい素数から順番にpに代入してみる。← i

p	2	3	5	7	11	13	17	19	⋯
$2p+1$	5	7	11	15	23	27	35	39	⋯
$4p-1$	7	11	19	27	43	51	67	75	⋯
$6p-1$	11	17	29	41	65	77	101	113	⋯
$8p+1$	17	25	41	57	89	105	137	153	⋯

⇒ $p=2$, 5のときは5つの数が全て素数。pがそれ以外の場合は5つの数のいずれかの数に
5の倍数が含まれていると予想を立てる。 ⇒pを5で割った余りに分類してみる。

（解答） pは素数なので、pは2以上の自然数。　← ii
よって、pは$5k$, $5k\pm1$, $5k-2$, $5k-3$(k: 自然数)と表せる。　← iii
（ア）$p=5k$のとき
$k=1$のときのみ、pが素数となる。このとき、$2p+1=11$, $4p-1=19$,
$6p-1=29$, $8p+1=41$となり、5つの数が全て素数となる。　← iv
（イ）$p=5k+1$のとき
$6p-1=6(5k+1)-1=5(6k+1)$　← v
kは自然数なので、$6k+1$は7以上の自然数。よって、$6p-1$は素数でない。
（ウ）$p=5k-1$のとき
$4p-1=4(5k-1)-1=5(4k-1)$　← v
kは自然数なので、$4k-1$は3以上の自然数。よって、$4p-1$は素数でない。
（エ）$p=5k-2$のとき
$8p+1=8(5k-2)+1=5(8k-3)$　← v
kは自然数なので、$8k-3$は5以上の自然数。よって$8p+1$は素数でない。
（オ）$p=5k-3$のとき
$2p+1=2(5k-3)+1=5(2k-1)$　← v
kは自然数なので、$2k-1$は1以上の自然数。
よって、$k=1$のときのみ、pが素数となる。このとき、$2p+1=5$, $4p-1=7$,
$6p-1=11$, $8p+1=17$となり、5つの数が全て素数となる。　← iv
（ア）～（オ）より、求める自然数p は$p=2$, 5

補足

ⅰ⋯問題がわかりにくいときは文字に具体的な数字を代入して実験し、規則性などがないかを探す
ⅱ⋯2は素数の中で唯一偶数であることに注意
ⅲ⋯$p=5k\pm2$とおくと、$p=2$を表せない
ⅳ⋯残りの数が素数となるかを確認する
ⅴ⋯それぞれの場合で、pが素数とならない場合を考える。この場合、5でくくり、5の　倍数であることを示せばよい

割り算の余りの性質

【3】 mを正の整数、2つの整数a, bをmで割ったときの余りをそれぞれr, sとする。
①$a + b$をmで割った余りは、$r+s$をmで割った余りと等しい。
②$a - b$をmで割った余りは$r - s$をmで割った余りに等しい。
③abをmで割った余りはrsをmで割った余りに等しい。
④a^kをmで割った余りはr^kをmで割った余りに等しい。(k: 正の整数)

③の証明 p, qを整数とすると、$a = mp + r,\ b = mq + s$と表せる。

$$ab = (mp + r)(mq + s) = m(mpq + ps + qr) + rs$$

よって、abをmで割った余りは、rsをmで割った余りに等しい。

③より、④が成立する。

re)**例題1** 整数a, bについて、aを5で割ると2余り、bを5で割ると4余る。**このとき、**
(1)$a + b$ (2)$a - b$ (3)ab **の余りを求めよ。**

(解答) aを5で割った余りは2、bを5で割った余りは4だから、
(1) **上記①より、**$a + b$を5で割った余りは$2 + 4 = 6$を5で割った余りと**ひとしいので**
$a + b$を5で割った余りは 1
(2) **上記②より、**$a - b$を5で割った余りは$2 - 4$を5で割った余りに等しく、3
(3) **上記③より、**abを5で割った余りは2×4を5で割った余りに等しく、3

例題6(1)49^{100}を6で割った余り (2)3^{80}を10で割った余り

(解答)
(1)**49を6で割った余りは1なので、**上記④より、49^{80}を6で割った余りは
1^{80}を6で割った余りに等しく、1

(2)$3^{80} = (3^4)^{20} = 81^{20}$**であり、81を10で割った余りは1であることから、**
3^{80} **を10で割った余りは**1^{20}を10で割った余りに等しく、1

合同式

【4】 m:正の整数。2つの整数a, bについて$a - b$がmの倍数であるとき、
aとbはmを法として合同といい、　$a \equiv b \pmod{m}$　と表す。

$a \equiv b \pmod{m}$ ⇔ aをmで割った余りとbをmで割った余りが等しい。･･･☆

[1]$a \equiv a \pmod{m}$　　[2]$a \equiv b \pmod{m}$のとき、$b \equiv a \pmod{m}$
[3]$a \equiv b, b \equiv c \pmod{m}$のとき、$a \equiv c \pmod{m}$

◯合同式の性質　a, b, c, d:整数　m, k:正の整数
①$a + b \equiv c + b \pmod{m}$　　②$a - b \equiv c - d \pmod{m}$
③$ab \equiv cd \pmod{m}$　　④$a^k \equiv c^k \pmod{m}$
⑤$ac \equiv bc \pmod{m}$のとき、cとmが互いに素ならば、$a \equiv b \pmod{m}$

例1　8と15と57を7で割ることを考える。
8、15、57を7で割った余りはいずれも1なので、$8 \equiv 15 \equiv 57 \pmod{7}$

例2　4を法として13と合同な数を考える。
$13 = 4\times(-1) + 17 = 4\times1 + 9 = 4\times2 + 5 = 4\times3 + 1 = 4\times4 - 3 = \cdots$
なので、$13 \equiv 17 \equiv 9 \equiv 5 \equiv 1 \equiv -3 \equiv \cdots \pmod{4}$と表せる。←※

例3（⑤について）
合同式の両辺は、法とした数と互いに素な数であれば割ることができる。
$145 \equiv 232 \pmod{3}$　のとき、3と29は互いに素な数なので、
合同式の両辺を29で割ることができ、$5 \equiv 8 \pmod{3}$

補足

・一般に、余りによる分類をする際、整数全体を自然数で割った余りを考えるより　も、合同式を利用する方が扱いやすい

※合同式の定義より、$a - b$がmの倍数であれば$a \equiv b$なので、13との差が4の倍数である　数は全て13と合同であるとみなせる
⇒⇒余りを負の数によって表すことが可能になった！
⇒基本的に、合同式の中の数は絶対値が小さい数の方が扱いやすい！

（⑤の証明）$ac \equiv bc \pmod{m}$のとき、cとmの最大公約数をgとすると、
$c = c'g, m = m'g$　(c', m'は互いに素)と表せる。
合同式の定義より、$ac \equiv bc$のとき、$ac - bc = mk$ (k:整数)なので、
$(a - b)c = (a - b)c'g = m'gk$　両辺をgで割って、$(a - b)c' = m'k$
c'とm'は互いに素だから$a - b$はm'で割り切れる。
よって、$a \equiv b \pmod{m'}$　つまり、$a \equiv b \pmod{\frac{m}{g}}$
ここで、cとmが互いに素のとき、$g = 1$なので、$a \equiv b \pmod{m}$

re例題1　整数a, bについて、aを5で割ると2余り、bを5で割ると4余る。**このとき、**
$(1)a+b$　$(2)a-b$　$(3)ab$　**の余りを求めよ。**

（解答）　**条件より、**$a\equiv 2$, $b\equiv 4\ (mod\ 5)$
$(1)\ a+b\equiv 2+4\equiv 6\equiv 1 \quad (mod\ 5)$
$(2)\ a-b\equiv 2-4\equiv -2\equiv 3 \quad (mod\ 5)$
$(3)\ ab\equiv 2\times 4\equiv 8\equiv 3 \quad (mod\ 5)$

re例題4　$N=2n^3+3n^2+n$（n: 整数）が6の倍数であることを証明せよ。

（解答）Nが6の倍数 ⇔ Nが2の倍数かつNが3の倍数
$N=n(2n^2+3n+1)=n(n+1)(2n+1)$
$n(n+1)$は2連続整数の積なので、Nは2の倍数
すべての整数nは、$n\equiv 0$, 1 , $2\ (mod\ 3)$と表せる。　← i
（ア）$n\equiv 0\ (mod\ 3)$のとき
$N=n(2n^2+3n+1)\equiv 0\ (mod\ 3)$　← ii
（イ）$n\equiv 1\ (mod\ 3)$のとき
$N=n(2n^2+3n+1)\equiv 1(2+3+1)\equiv 6\equiv 0\ (mod\ 3)$
（ウ）$n\equiv 2\ (mod\ 3)$のとき
$N=n(2n^2+3n+1)\equiv 2(8+6+1)\equiv 30\equiv 0\ (mod\ 3)$
（ア）～（ウ）より、いずれの場合もN**は3の倍数**
よって、Nは6の倍数

補足
i ･･･$n=3k$, $3k+1$, $3k+2$に分類する代わりに、$mod\ 3$を利用している
ii ･･･与式のnを$n\equiv 0$と置き換えている。**このように、合同式中では合同な数どうしを置き　換えることができるが、指数などと置き換えることはできない**

re例題6　（1）49^{100}を6で割った余り　（2）3^{80}を10で割った余り

（解答）　（1）$49^{100}\equiv 1^{100}\equiv 1\ (mod\ 6)$
（別解）$49^{100}=(7^2)^{100}=7^{200}\equiv 1^{200}\equiv 1\ (mod\ 6)$

（2）$3^{80}\equiv (3^2)^{40}\equiv 9^{40}\equiv (-1)^{40}\equiv 1 \quad (mod\ 10)$

このように、<u>整数を余りで分類する際に合同式を利用すると、比較的簡潔に解答できる</u>。

例題7　37^{2015}の1の位を求めよ。

（解答）　以下、$mod\ 10$ で考える。　← i

$37 \equiv -3$なので、　← ii

$37^{2015} \equiv (-3)^{2015} \equiv \{(-3)^2\}^{1007} \times (-3)$

$\equiv 9^{1007} \times (-3) \equiv (-1)^{1007} \times (-3) \equiv -3 \equiv 7$

補足

i ･･･ある数の1の位の数は、その数を10で割った余りに等しいので$mod\ 10$を利用する
　　同様に、ある数の下2桁を求めるときは、$mod\ 100$を考えればよい
ii ･･･37≡7と表すより、絶対値の小さい数の方が扱いやすいので、$37 \equiv -3$と表す

例題8　nは整数とするとき、n^2を3で割った余りを求めよ。

（解答）以下$mod\ 3$で考えると、すべての整数nは$n \equiv 0, n \equiv 1, n \equiv 2$と表せる。　← i

（ i ）$n \equiv 0$のとき　$n^2 \equiv 0$

（ ii ）$n \equiv 1$のとき　$n^2 \equiv 1$

（ iii ）$n \equiv 2$のとき　$n^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 1$

i ～ iii より、n^2を3で割った余りは、0または1。

補足

i ･･･ 3で割った余りを考えるので、$mod\ 3$で分類する

★　同様に、平方数を3,4,8などで割った余りにも規則性がある。

n	1	2	3	4	5	6	7	･･･
n^2	1	4	9	16	25	36	49	･･･
$mod\ 2$	**1**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	･･･
$mod\ 3$	**1**	**1**	0	**1**	**1**	0	**1**	･･･
$mod\ 4$	**1**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	･･･
$mod\ 5$	**1**	*4*	*4*	**1**	0	**1**	*4*	･･･
$mod\ 8$	**1**	*4*	**1**	0	**1**	*4*	**1**	･･･

例題9　$18^{n}+2^{3}\cdot(-21)^{n-1}$ は13で割り切れることを示せ。(n: 自然数)

（解答）　以下、$mod\ 13$ で考える　　← i

$18\equiv 13+5\equiv 5$ ，$-21\equiv -13\cdot 2+5\equiv 5$ だから、

（与式）$\equiv 5^{n}+2^{3}\cdot 5^{n-1}\equiv 5^{n-1}(5+2^{3})\equiv 5^{n-1}\cdot 13\equiv 0$　　← ii

よって、$18^{n}+2^{3}\cdot(-21)^{n-1}$ は13で割り切れる

補足

i ･･･13で割り切れるとき、(与式)が13で割った余りが0となる
⇒自然数nを整数kを用いて13で割った余りで分類する($13k$, $13k\pm 1$, $13k\pm 2$, ･･･)
と場合分けの数が多く、計算が面倒
⇒$mod\ 13$ において(与式)$\equiv$ 0となれば13で割り切れる
⇒$mod\ 13$ で考えてみる
ii ･･･合同式中の数を置き換えている

演習1　2000^{2000}を12で割った余りを求めよ。

(解答)以下$mod\ 12$で考える

$2000=12\times 166+8=12\times 167-4$だから、$2000\equiv -4$ と表せるので　← i

$2000^{2000}\equiv(-4)^{2000}\equiv 16^{1000}\equiv 4^{1000}\equiv 16^{500}\equiv\cdots$　← ii

ここで、

4^{n}	4^{1}	4^{2}	4^{3}	4^{4}	4^{5}	･･･
	4	16	64	256	1024	･･･
$mod\ 12$	4	4	4	4	4	･･･

表より、4^{n}は $mod\ 12$ で 4 , 4 , 4 , 4 ,･･･と繰り返されるので、

$2000^{2000}\equiv 4^{1000}\equiv 4$

よって、求める余りは 4

補足

i ･･･合同式中では絶対値の小さい数のほうが扱いやすい
ii ･･･指数部分が小さくならず計算が面倒
⇒4^{n}が nの値によって$mod\ 12$ でどのように変化するかをnに具体的な数を代入して実験し、周期性などがないかを探す

演習2　どの2つも互いに素である自然数a，b，cについて、$a^2+b^2=c^2$を満たすとき
(1)　cは奇数であることを示せ
(2)　a，bのどちらか一方は3の倍数であることを示せ

（解答）

（1）cは偶数であると仮定すると、$c^2=2c'$と表せる　←i

よって、$c^2\equiv 4c'^2\equiv 0\ (mod\ 4)$　←ii

また、$a^2\equiv 1\ (mod\ 4),\ b^2\equiv 1\ (mod\ 4)$

よって、$a^2+b^2\equiv 1+1\equiv 2\ (mod\ 4)$

これは、$c^2\equiv 0\ (mod\ 4)$に矛盾

よって、仮定が誤りであり、cは奇数である

（2）a，bのどちらも3の倍数でないと仮定すると、　←iii

$a^2\equiv 1\ (mod\ 3)$　，$b^2\equiv 1\ (mod\ 3)$　←iv

よって、$a^2+b^2\equiv 1+1\equiv 2\ (mod\ 3)$　←v

(1)より、cは奇数なので、$c^2\equiv 1$

これは自然数a，b，cが$a^2+b^2=c^2$を満たさず、矛盾

よって、仮定が誤りであり、a，bのどちらか一方は3の倍数である

補足

i ･･･自然数a，b，cは互いに素なので、a，b，cのうち偶数は多くとも1つ

$a^2+b^2=c^2$は①（左辺）＝（偶数）＋（偶数）、（右辺）＝（偶数）

②（左辺）＝（奇数）＋（奇数）、（右辺）＝（偶数）

③（左辺）＝（偶数）＋（奇数）、（右辺）＝（奇数）の3種類

（右辺）＝c^2が奇数となるのは③の場合

⇒背理法を利用し、cは偶数であると仮定して矛盾を導く

ii ･･･平方数は$mod\ 4$で0または1にしかならないことを利用する

iii ･･･「～のどちらか一方」→「～のどちらも～ない」と仮定し、背理法を利用する

iv ･･･平方数は$mod\ 3$ で0または1にしかならないことを利用する

v ･･･3で割って2余る平方数は存在しない

n	1	2	3	4	5	･･･
n^2	1	4	9	16	25	･･･
$mod\ 3$	1	1	0	1	1	･･･
$mod\ 4$	1	0	1	0	1	･･･

演習３　2以上の自然数nに対し、nとn^2+2がともに素数となるのは
$n=3$に限ることを示せ

(実験)　nが素数となることを利用し、nとn^2+2のnに具体的な数を代入して実験し、
法則を見つける　←ｉ

n	2	3	5	7	11	13	17	･･･
n^2+2	6	11	17	51	123	171	291	･･･

⇒⇒ $n=3$のとき以外はn^2+2が3の倍数になっていると予想を立てる。　←ii
⇒⇒nを3で割った余りで分類してみる

（解答）(Ⅰ)$n=2$のとき、$n^2+2=2^2+2=6$となり、
nとn^2+2がともに素数とならない
(Ⅱ)$n=3$のとき、$n^2+2=3^2+2=11$となり、
nとn^2+2がともに素数となる
(Ⅲ)$n\geq 4$のとき、nは素数となる必要があるので、$n\equiv\pm 1\ (mod\ 3)$と表せる　←iii
(ｉ)$n\equiv 1(mod\ 3)$のとき
$n^2+2\equiv 1^2+2\equiv 3\equiv 0(mod\ 3)$
(ⅱ)$n\equiv -1\ (mod\ 3)$のとき
$n^2+2\equiv(-1)^2+2\equiv 3\equiv 0\ (mod\ 3)$
(ｉ)(ⅱ)より、$n\geq 4$のとき、n^2+2は常に3の倍数となるので、
nとn^2+2がともに素数とならない
(Ⅰ)～(Ⅲ)より、nとn^2+2がともに素数となるのは、$n=3$のときに限る

補足
ｉ･･･n^2+2を積の形にできず、素数となる場合を考えにくい
⇒具体的な数を代入して実験
ⅱ･･･n^2+2が3の倍数であることを示したいので、3で割った余りで分類する
ⅲ･･･$n\equiv 0$のとき、nは3の倍数となるので、$n=3$のとき以外はnは素数とならない

不定方程式

【5】　①範囲を絞って調べる範囲を狭くする
②積＝定数の形に変形
③その他（一次不定方程式など）

補足

①文字の条件（正の整数なら1以上、3桁の数なら$100 \leq N \leq 999$など）や置き換　　えなどを利用して、調べる文字の範囲をできるだけ狭くすることを考える
②因数分解などで与式を積の形に変形し、（積）＝（定数）を満たすものを調べる
このとき、文字の範囲を絞って調べる範囲を狭くすることも考える

①についての例

例題10　$x + 2y + 4z = 10$を満たす自然数x, y, zを求めよ。

（解答）与式より、$4z = 10 - (x + 2y)$　←i
x, yは自然数だから、$x \geq 1, y \geq 1$なので、$x + 2y \geq 3$　←ii
よって、$4z \leq 7$となり、$1 \leq z \leq \frac{7}{4}$　←iii
zは自然数なので、$z = 1$
このとき、$x + 2y + 4 = 10$となり、$x + 2y = 6$
$2y = 6 - x$　←iv
$x \geq 1$より、$2y \leq 5$
よって、$1 \leq y \leq \frac{5}{2}$
yは自然数なので、$y = 1, 2$
$y = 1$のとき、$x = 10 - 2 - 4 = 4$
$y = 2$のとき、$x = 10 - 4 - 4 = 2$
(x, y, z) =(4, 1, 1)　(2, 2, 1)

補足

i ･･･ $x =$, $y =$, $z =$ の形に変形したとき、最も範囲を狭くできる文字はzであるので
zについて整理してみる
ii ･･･x, yは自然数であることを利用して範囲を絞る
iii ･･･条件から、zの範囲を絞る
iv ･･･zの次に係数の大きいyの範囲を絞る

①、②についての例

例題11　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$、$0<x\leq y\leq z$を満たす自然数$(x,y,z)$の組を求めよ。

（解答）$0<x\leq y\leq z$だから、$\frac{1}{x}\geq\frac{1}{y}\geq\frac{1}{z}$

よって、$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$　← i

$0<x\leqq 3$となり、$x=1,2,3$

（ i ）$x=1$のとき、$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$となるため、不適。

（ ii ）$x=2$のとき、$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

両辺に$2yz$をかけると、$2z+2y=yz$

$yz-2x-2y=0$となり、$(y-2)(z-2)=4$　← ii

$0<x\leq y\leq z$だから、$0\leqq y-2\leqq z-2$　← iii

↓iv

$y-2$	1	2	4	-1	-2	-4
$z-2$	4	2	1	-4	-2	-1
	○	○	×	×	×	×

$(y-2,z-2)=(1,4)(2,2)$

よって、$(x,y,z)=(2,3,6)(2,4,4)$

（ iii ）$x=3$のとき、$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$

両辺に$\frac{3}{2}yz$をかけると、$yz-\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z=0$

$(y-\frac{3}{2})(z-\frac{3}{2})=\frac{9}{4}$

両辺に4をかけて、$(2y-3)(2z-3)=9$

$3\leqq 2y-3\leqq 2z-3$だから、$(2y-3,2z-3)=(3,3)$　← v

よって、$(x,y,z)=(3,3,3)$

ｉ～iii より、$(x,y,z)=(2,3,6)(2,4,4)(3,3,3)$

補足

ｉ・・・$\frac{1}{x}\geq\frac{1}{y}\geq\frac{1}{z}$を利用して与式の$y$，$z$を最も小さい$x$に置き換えることで、上から$x$の範囲を絞る

ii ・・・因数分解して(積)＝(定数)の形にする。この場合、yzの係数が1になるよう、
$(y-○)(z-□)=$（定数）となるよう無理やり因数分解し○や□、定数を求める

iii ・・・このとき、x=2だから、0＜2≦y≦z　よって、0≦y−2≦z−2

iv ・・・(y−2)(z−2)=4を満たすy，zを書き出して、不等式などの条件に適するものを探す

v ・・・このとき、x=3だから、0＜3≦y≦z　よって、3≦2y−3≦2z−3

ユークリッドの互除法･･･因数分解に頼らない最大公約数の求め方

【6】 2つの自然数a, bについて、aをbで割ったときの商をq, 余りをrとすると
aとbの最大公約数はbとrの最大公約数に等しい

例1　371と1219の最大公約数を求める。
1219=371×3+106　（1219と371の最大公約数）＝（371と106の最大公約数）
371=106×3+53　　＝（106と53の最大公約数）
106=53×2+0
よって、371と1219の最大公約数は53

（証明）条件より、$a = bq + r$･･･①
移行して、$r = a - bq$･･･②
aとbの最大公約数をm, bとrの最大公約数をnとする。
mはaとbの公約数だから、②より、mはrの約数。よって、mはbとrの公約数。
bとrの最大公約数はnだから、$m \leq n$･･･③
一方、　nはbとrの公約数だから、①よりnはaの約数。よって、nはbとaの公約数。
aとbの最大公約数はmだから、$n \leq m$･･･④
③、④より、　$m = n$

例2　177と52の最大公約数を177と52を使って表す

互除法を用いて、
177=52･3+21　　移項　21=177−52･3　･･･①
52=21･2+10　　移項　10=52−21･2　･･･②
21=10･2+1　　移項　1=21−10･2　･･･③
10=1･10+0
よって最大公約数は1
ここで、③に①,②を代入して、　1＝21−(52−21･2)･2　　③←②
＝21･5+52･(−2)
＝(177−52･3)･5+52･(−2)　　③←①
＝177･5+52･(−17)
よって　1＝177･5+52･(−17)

このように、互除法を用いて、2つの整数a, bの最大公約数gを任意の整数p, qを用いて
$g = ap + bq$　と表せる。
特に、a, bが互いに素であるとき、最大公約数gは1なので、
$ap + bq = 1$　を満たす整数p, qが存在する。
ここで、両辺に整数cをかけると、$a(cp) + b(cq) = c$　が成り立つ。

一次不定方程式

【7】 a, b, c:整数の定数、$a \neq 0$, $b \neq 0$とする。x, yについての1次方程式
$ax + by = c$ を成り立たせる整数x, yの組をこの方程式の整数解という

★ 2つの整数a, bが互いに素であるならば、どんなcについても
$ax + by = c$を満たす整数x , yが存在する。

（★より、a, bが互いに素ならばこの方程式を成り立たせる整数x, yが存在する。）

例題12 方程式$3x + 5y = 43$･･･①を満たす整数x,yを全て求めよ。

（解答） $(x, y) = (1, 8)$はこの方程式を満たすので、$3 \cdot 1 + 5 \cdot 8 = 43$･･･② ← i
①ー②より、 $3(x - 1) + 5(y - 8) = 0$
$3(x - 1) = -5(y - 8)$･･･③
3と5は互いに素だから、 $x - 1$ は5の倍数 ← ii
よって、 $x - 1 = 5k$ (k:整数)とおくと、$x = 5k + 1$ ←iii
③に代入して、 $15k = -5(y - 8)$
よって、 $y - 8 = -3k$ となり、 $y = -3k + 8$
①を満たすx, yは、$x = 5k + 1$, $y = -3k + 8$ (k:整数) ←iv

補足

i ･･･一次不定方程式を解くとき、まずは1組の解（特殊解）を見つける。元の式から特殊 解を代入した式を引き、右辺を0にすることで○$x = \triangle y$の形をつくり、○と△が互いに素で あれば、
xは△の倍数、yは○の倍数であることを利用する
ii ･･･③より、左辺は3の倍数×整数、右辺は5の倍数×整数 であり、等式が成立するには 左辺の整数部分が5の倍数である必要がある
iii ･･･$x - 1$が5の倍数となるxは無数に存在するので、整数kを用いて一般的に表す
iv ･･･使用した特殊解によって異なるが、解全体としては同じ

例題13 方程式$177x + 52y = 2$･･･①を満たす整数x, yの組を求めよ。 ← i

（解答）

①の係数177 , 52について、互除法を用いて、

177=52･3+21より、 21=177−52･3 ･･･②

52=21･2+10より、 10=52−21･2 ･･･③

21=10･2+1より、 1=21−10･2 ･･･④

④に③,②を代入して、 1＝21−(52−21･2)･2＝21･5+52･(−2)

＝(177−52･3)･5+52･(−2)＝177･5+52･(−17)

よって 、 177･5+52･(−17)＝1

両辺に2をかけて、 177･10+52･(−34)=2･･･⑤ ← ii

①−⑤より、 $177(x-10)+52(y+34)=0$

よって、 $177(x-10)=-52(y+34)$･･･⑥

177と52は互いに素なので、$x-10$は52の倍数

$x-10=52k$(k: 整数)とすると、$x=52k+10$

⑥に代入すると、177･52k=−52$(y+34)$

$y+34=-177k$となり、$y=-177k-34$

①を満たす整数x, yは、$x=52k+10$, $y=-177k-34$

補足

ｉ･･･特殊解を見つけることが難しい場合、互除法を用いて最大公約数を表す

ii･･･右辺の数字を与式と揃えるため、両辺に2をかける

演習４　11で割ると2余り、7で割ると6余るような3桁の自然数Nの最大値、最小値は？

（解答）

$N=11p+2$, $N=7q+6$より、$11p+2=7q+6$ ← i

よって、$11p-7q=4$ ･･･① となり、一次不定方程式である

$p=1$, $q=1$のとき、①が成り立つので、$11\cdot1-7\cdot1=4$ ･･･②

①−②より、$11(p-1)-7(q-1)=0$

$11(p-1)=7(q-1)$となり、7と11は互いに素なので、$p-1=7k$(k: 整数)と表せる

よって、$p=7k+1$

このとき、$N=11(7k+1)+2=77k+13$

Nは3桁だから、$100\leq 77k+13\leq 999$ ← ii

よって、$\frac{87}{77}\leq k\leq \frac{986}{77}=12.8\cdots$ kは整数なので、$k=2,3,\cdots,12$

$k=1$のとき、Nが最小となり、$N=77\cdot2+13=167$

$k=12$のとき、Nが最大となり、$N=77\cdot12+13=937$

補足

ｉ･･･条件を式に表す

ii･･･Nは3桁であることを利用して、kの範囲を絞る

演習５　mを正の整数とする。

(1)$70x + 130y = m$が整数解を持つとき、mの最小値を求めよ。
(2) (1)のすべての整数解を求めよ。
(3)x, yについての1次方程式$70x + 130y = m$を満たすx, yがともに正の整数　　解を3つ持つようなmの最小値を求めよ。

(1)　$10(7x + 13y) = m$　より、左辺が10の倍数なので、右辺も10の倍数
よって、$m = 10m'$(m': 正の整数)と表せる。
このとき、$7x + 13y = m'$　…①
xとyの係数が互いに素なので、どのようなm'についても、この一次不定方程式を成　　り立たせる整数x, yが存在する。　← i
mが最小となるm'は、$m' = 1$
このとき、$m = 10$

(2)　(1)より、$70x + 130y = 10$　　両辺を10で割って　$7x + 13y = 1$…②
$(x, y) = (2, -1)$のとき、②が成り立つので、$7\cdot 2 + 13\cdot(-1) = 1$…③
②−③より、$7(x - 2) + 13(y + 1) = 0$
$7(x - 2) = -13(y + 1)$となり、7と13は互いに素なので、
$x - 2 = 13k$ (k: 整数)と表せる
よって、$x = 13k + 2$, $y = -7k - 1$ (k: 整数)

(3)　③×m'より、$7\cdot 2m' + 13\cdot(-m') = m'$…④　　← ii
①−④より、　$7(x - 2m') + 13(y + m') = 0$
$7(x - 2m') = -13(y + m')$
7と13は互いに素だから、x, yは整数lを用いて、　　$x = 13l + 2m'$, $y = -7l - m'$と表せる
x, yは正の整数なので、$x = 13l + 2m' \geq 1$, $y = -7l - m' \geq 1$　　← iii
lについて考えると、$\frac{1-2m'}{13} \leq l$, $l \leq \frac{-1-m'}{7}$
よって、　$\frac{1-2m'}{13} \leq l \leq \frac{-1-m'}{7}$
よって、lの最小値$l' = \frac{1-2m'}{13}$　, lの最大値$l'' = \frac{-1-m'}{7}$
x, yがともに正の整数解を3つ持つので、このとき、$2 \leq l'' - l' < 3$　　←☆
$l'' - l' = \frac{13(-1-m')-7(1-2m')}{91} = \frac{m'-20}{91}$　　なので、
よって、$2 \leq \frac{m'-20}{91} < 3$　つまり、$202 \leq m' < 293$
mが最小となるのは、m'が最小　つまり、$m' = 202$のとき
このとき、$m = 10m' = 10\cdot 202 = 2020$

補足
i …【6】★を参照
ii …右辺にm'をかけ①ー④をして右辺を0にすることで○x = △yの形をつくりにかかる
iii …x, yが正の整数であることをりようしてm'の範囲を絞る

Ⅲ　番外編

ⅰフェルマーの小定理
ⅱ鳩ノ巣原理

番外編について

　この中で扱う内容は、「入試問題しか勝たん！計算問題しか勝たん！」という人には面白いものではないかもしれません。絶対に必要という知識ではなく、「ホ~こんな考え方もあるんやなぁ」ぐらいの気持ちでいい気がします。その代わり1から100まで丁寧に全てを載せているわけではないので、実際に手を動かして、考えながら、最後まで見てみてね。

ⅰフェルマーの小定理

　この定理を使って問題を解いていくというより、この定理を背景とした問題の方がよく出題されています。この定理の証明の中では、整数問題における重要な考え方や、性質が数多く含まれる上、この定理が背景問題となったときには、一気に点数を獲得できるため、知って損なことはほぼないです。

ⅱ 鳩ノ巣原理

　この話はほんとにおまけみたいなものです。じっくり考えることが好きな人や、「計算！計算！計算こそが正義！愛だ！」というのが苦手なひとには面白い話題であると思います。

ⅰ フェルマーの小定理

「p:素数　a:pと互いに素の整数　　$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$」

今回この定理を証明する方法を二つ紹介！！

証明する際は「$a^{p} \equiv a\ (mod\ p)$」を示す」

(aとpは互いに素の整数より両辺をaで割れるため、元の式と同値)

POINT　互いに素な二数の最大公約数は1,−1である

（この性質は息を吸うように使うので完璧に理解しておく方がいいです。）

証明①　二項定理と数学的帰納法を用いる。

POINT　文字の場合分け

（今回aはpと互いに素の整数というだけで符号が不明のため場合分けが必要
しかし、基本的に$a > 0$としてる場合が多いので流し見でいいです。）

$a < 0$のとき

$a = -b$とすると

$a^{p-1} = (-b)^{p-1} = (-1)^{p-1} \times b^{p-1}$

POINT　−を含む累乗は肩の数に注目

（偶奇で -1か1が分かるため気をつける癖をつけておくほうがいいです。）

POINT　素数の中で偶数なのは2だけ

（当たり前ですが地味に使うので一応書いときました）

$p \neq 2$のとき　pは素数より$p-1$は偶数になる　$(-1)^{p-1} \times b^{p-1} = b^{p-1}$

$p = 2$のとき　$(-1)^{2-1} = -1$　　$-1 \equiv 1 (mod\ 2)$　よって　$a = (-1) \times b = b (mod\ 2)$

よって $a^{p-1} = (-b)^{p-1} = (-1)^{p-1} \times b^{p-1} \equiv b^{p-1} (mod\ p)$

このことより、$a < 0$のときでも、$a > 0$に帰着できる

$a = 0$のとき

$a^{p} = 0$　より明らかに$a^{p} \equiv a\ (mod\ p)$を満たす

$a > 0$のとき

POINT　自然数に関する証明は数学的帰納方法を使うとうまくいく場合がある

[1] $a = 1$のとき　$a^{p} = 1 \equiv 1 (mod\ p)$

[2] $a = k (k = 1, 2, \ldots)$のとき　$k^{p} \equiv k (mod\ p)$と仮定する

$a = k + 1$のとき

$(k+1)^{p} = k^{p} + pC1k + pC2k^{2} + \cdots + pCp-1\ k + 1$

POINT　$pC1k + pC2k^{2} + \cdots + pCp-1\ k$は$p$の倍数（＊）

(重要な性質なので後に証明します)

$\equiv k^{p} + 1\ (mod\ p)$

また、仮定の $a = k (k = 1, 2, \ldots)$のとき　$k^{p} \equiv k (mod\ p)$より

$= k + 1 (mod\ p)$

このことより、$a = k + 1$のときでも成立する

よって数学的帰納法より、すべての自然数aにおいて「$a^{p-1} \equiv a \pmod p$」が成立

このことより、「p:素数　a:pと互いに素の整数　$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$」が示された

(＊)の証明

①$_pC_r$(p 素数　$1 \leq r \leq p-1$)の式変形から考える

POINT　知らないと直接的な変形は難しい

（後ほど意味を考えて変形する方法を紹介）

$$_pC_r = \frac{p!}{r!(P-r)!}\,{}_pC_r$$

$$= \frac{p}{r} \times \frac{(p-1)!}{(r-1)!\{(p-1)-(r-1)!}$$

$$= \frac{p}{r} \times {}_{p-1}C_{r-1}$$

$r \neq 0$より　$r \times {}_pC_r = p \times {}_{p-1}C_{r-1}$

また、　$1 \leq r \leq p-1$　p 素数 よりrとpは互いに素である

POINT　aとpは互いに素で、$a \times b$がpの倍数ならば、bがpの倍数である

（この性質も息を吸うように使うので完璧に理解しておく方がいいです。）

よって$_pC_r$(p 素数　$1 \leq r \leq p-1$)はpの倍数である。

②$_pC_r \times r$ (p 素数　$1 \leq r \leq p-1$)を別の視点で捉える

$_pC_r \times r$はp人の中からr人選び、そのうちの一人を選ぶ選び方の総数である

これとは逆の選び方をする

つまり、先に一人を決めて$n-1$人の中から$r-1$を選ぶ選び方は　$p \times {}_{p-1}C_{r-1}$ となる

逆の操作をするだけなので、求まる値は変わらない

よって　$r \times {}_pC_r = p \times {}_{p-1}C_{r-1}$が成立する　**(以下は①と同じ考え方)**

POINT（この性質自体は$p \geq 2\ r \geq 1$ で成立する。）

有名な二項係数の性質を下にまとめておきます

$_pC_r = {}_pC_{r-n}$

$_pC_r = {}_{p-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}\ (p \geq 2\ r \geq 1)$

$r \times {}_pC_r = p \times {}_{p-1}C_{r-1}\ (p \geq 2\ r \geq 1)$

$_pC_0 + {}_pC_1 + \cdots + {}_pC_p = 2^p$

（なぜこの式が成立するのか気になったら調べてみてね）

③Cで表されるものは整数(※)であることを利用する{$_pC_r \times r$ (p 素数　$1 \leq r \leq p-1$)}

POINT　Cで表されるものは整数になる。後ほど紹介

$$_pC_r = \frac{{}_pP_r}{r!} = \frac{p \times (p-1) \cdots \times \{(p-r)+1\}}{r \times (r-1) \cdots \times 1}$$

ここで、p 素数　$1 \leq r \leq p-1$ より、pとrは互いに素

POINT　互いに素な二数の最大公約数は1,−1である

よって$r!$ はpで割り切れない

しかし、$_pC_r$は整数

このことより、$r!$ は残りの$(p-1) \cdots \times \{(p-r)+1\}$で割り切れる

POINT　情報を式化する

（左辺が整数より右辺も整数になるのは当たり前ですが、以下の様な考え方
を自力で思いつくのは難しいと思うので、知っておいて損はないと思います。）

この割ったときの商をs(整数)とすると
$pCr = p \times s$ と表すことができるので、pCr(p 素数 $1 \leq r \leq p-1$)はpの倍数

※この証明はルジャンドルの定理($n!$ に含まれる素因数pの個数を一般化した公式)と
ガウス記号の性質を用いて、分子と分母の素因数pの数を比較することで、数式的に
証明することが可能（証明が気になった人は調べてみてね）
しかし、pCrはp個のものの中からn個選ぶ場合の数より整数であろう、ということは感覚的に分かります。

お疲れさまでした。証明①は終了です。証明そのものはそれほど長いものではなかったと思いますが、それに付随する性質なども証明するとなったらなかなか大変なものです。一方、証明②はある有名な定理を使うことでとても簡潔に証明することが可能です。

証明②「$n\times1, n\times2, \cdots n\times(p-1)$を$p$で割った余りは全て異なる（$p$ 素数 nとp 互いに素）」(＊)

POINT $n\times1, n\times2, \cdots n\times(p-1)$を$p$で割った余りは全て異なる（$p$ 素数 nとp 互いに素）
(暗記はしておかなくても証明すれば当たり前に感じると思います。
証明は後ほど。）

$n\times2n\times3n\times\cdots(p-1)n \equiv 1\times2\times3\times\cdots(p-1) \pmod p$

POINT 情報を式化する
（よくわからないことも式にすれば、理解できることがあるので
心がけておくといいと思います。

今回,割った余りが全て異なるとありますが(nとpは互いに素)より
余りは0になることがないため、$1, 2, 3, \cdots(p-1)$のどれかになります。）

$n^{p-1}\times(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod p$ $\quad \therefore (n^{p-1}-1)(p-1)! \equiv 0 \pmod p$
pは素数より$(p-1)!$はpの倍数でないので
$n^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod p$ $\quad \therefore n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

（＊）⇔「$n\times1, n\times2, n\times3, \cdots n\times(p-1)$を$p$で割ると余りの等しい組は存在しない」を証明

POINT ないことの証明は背理法を考えてみる
（これもおそらく脳裏に焼き付いていると思いますが一応書きました）

「$n\times1, n\times2, n\times3, \cdots n\times(p-1)$を$p$で割ると余りが等しい組が存在する」と仮定する

POINT 情報を式化する

割った余りが等しい組を、$n\times i, n\times j (1 \leq i < j \leq p-1)$とする
$n\times i \equiv n\times j \pmod p$ $\quad \therefore n(j-i) \equiv 0 \pmod p$
ここで、nとpは互いに素より $(j-i) \equiv 0 \pmod p$
しかし、$(1 \leq i < j \leq p-1)$より $j-i$の範囲は $(0 < j-i \leq p-2)$となるため
$j-i$はpの倍数とならない　つまり$j-i \equiv 0 \pmod p$は矛盾する
よって仮定が偽のため、

「$n\times1, n\times2, n\times3, \cdots n\times(p-1)$を$p$で割ると余りの等しい組は存在しない」が示された

お疲れさまでした！これで証明②も終了です。個人的な感想ですが、一つの定理をとっても、全く異なる角度から証明できるのは本当にすごいですよね。

さて、話を戻しますが、せっかくここまで見てすぐに忘れてしまってはもったいないと思うので、この下にフェルマーの小定理に関する問題を載せておきます。

(解答の際にフェルマーの小定理を使わず、重要な性質は簡単にでも証明してください

また、解答は上記の証明内に全てあるので省略しますが、解くためのヒントは最後のページに載せておきます。)

問1 p を素数とする.

(1)自然数 k が $1 \leq k \leq p-1$ を満たすとき, pCk は p で割り切れることを示せ.

ただし, pCk は p 個のものから k 個取った組合せの総数である.

(2)n を自然数とするとき, 数学的帰納法を用いて, $n^p - n$ は p で割り切れることを示せ.

(3)n が p の倍数でないとき, $n^{p-1} - 1$ は p で割り切れることを示せ. ['14 富山大]

問2 pは 素数、nとp は互いに素とする

$n\times1, n\times2, \cdots n\times(p-1)$を$p$で割った余りは全て異なることを証明せよ.

以上でフェルマーの小定理に関してはおしまいです！！お疲れさまでした！！

ii 鳩ノ巣原理(部屋割り論法)

m匹の鳩をn個の巣に入れるとき、$m > n$であれば、少なくとも1個の巣には2匹以上の鳩が存在する

鳩ノ巣原理についての話をしていきましょう。今回は、数式的な性質を証明していくというものではなく、何かを証明するときに使う論法のうちの一つを、実例を交えて紹介していくというものです。文字があるので、少しややこしく見えますが、この原理自体は、いたって当たり前のことです。

具体例を出してみます。
三羽の鳩がいて、彼らは巣を二つ持っています。
この三羽の鳩が巣に帰ったとき、多い方の巣には必ず何羽以上の鳩がいるでしょうか。

正解は二羽以上です！。(鳩と巣の絵を書いてみるとよく分かります)

噛み砕いて説明するならば、鳩の数より巣の数が少なければ、どこかの巣には必ず2羽以上の鳩が存在する。鳩ノ巣原理はこのことを表しています。

先に書いておきますが、この鳩ノ巣原理で重要なことは
「鳩」「巣」をうまく設定すること
です。
例題1のように簡単な状況ならすぐに分かりますが、難しい状況になると「鳩」「巣」を探すのが問題を解く鍵になるので、どう設定すればよいのかかよ~く考えてください！

とまぁ、このように基本的にほぼほぼ計算は必要なく頭を使い、実験しながら、考えていく分野です。今回は、六題用意しています。最後まで楽しんで見てくだい！！

例題1
裏面と表面を判別できるようなコインを3つ投げる。このとき、投げた後に同じ面のコインが存在することを示せ。

例題2
一辺が4mの正方形の部屋に、ヒトが5人いるとすると、ヒトとヒトとの距離が3m未満であることを示せ。

練習問題1
3×3の9マスの中に、1,2,3のどれかを書く。このとき、それぞれの縦、横、斜めの和のうち、一致するものが存在することを示せ。

練習問題2
xy平面上に互いに異なる5個の格子点(x座標,y座評どちらも整数となる点)を任意に選ぶと。その中に、2つの格子点を結ぶ線分の中点がまた格子点になるような2点が存在することを示せ。

発展問題1
6人いれば互いに知り合いの3人か互いに知り合いでない3人が必ず存在することを示せ。

発展問題2
二人以上いると知り合いの数が同じ二人が存在することを示せ。

以上になります！！解答は最後のページに書いておきますが、実際に手を動かしてわかってほしいので、簡潔にしてます。ぜひ、自分で考えてみてください
いかがだったでしょうか。面白いとおもった人は、文明の力を大いに使って、もっと調べてみてください。まだまだ難しい問題や面白い問題があります。

例えば、数学Aに載っている、「互いに素な自然a,bに対して、$ax+by=1$となる整数$x.y$が存在する」このことを鳩ノ巣原理を用いて証明したりしている人もいました。

ということで、これをもって番外編は終わりです。お疲れさまでした。2つのことを紹介するのにこれほどの時間がかかるとは、やっぱり教科書というものは偉大で素晴らしいものだと、実感しました。今回自分は、「整数」分野のおまけとして個人的にあるときに興味があった話題を選んだだけであって、他にもまだまだ面白い話題が、たくさんの分野の中に存在するので、普段の勉強の息抜きなどにみてほしいなと思います。

教科書ということで単元別に紹介していましたが、入試問題は初見の問題であるので、どういう知識が必要でどのような考え方が必要なのかを自分で考えて解く必要があります。このことから、私が言いたいのは経験がものをいう、ということです。どの分野でもありうることですが、頭の中では理解しているつもりでも、実際に手を動かして解いてみると手が止まってしまうことはよくあることだと思います。なので、寝る間も惜しんで解く必要はないと思いますが、ある程度は問題を解き、解説を見てそのなかで整数問題を解く「勘」を養って行けば「整数王」に近づくはずだと思います。

最後までご覧いただきありがとうございました。

解答集

フェルマーの小定理　ヒント

問1　(1)　pで割り切れるということはpの倍数である。

1. pCrを$p-1Cr-1$ の形に変形　2. pCrが整数であることを利用

(2) (1)の結果を利用

(3) $n^{p-1} - 1$の形だけから導くのは難しいので、(2)の形を利用する

問2 全て異なることを、証明しやすい形に言い換えていく

鳩ノ巣原理

例題1
裏面と表面を判別できるようなコインを3つ投げる。このとき、投げた後に同じ面のコインが存在することを示せ。

コインの判別方法は裏面か表面の2通り存在。これを「巣」とする。コインの数は3つ存在、これを「鳩」とする。そして、鳩ノ巣原理を用いて考えると、少なくとも1個の巣に2匹以上の鳩が存在するため、投げた後に同じ面のコインが存在する。

例題2
一辺が4mの正方形の部屋に、人が5人いるとすると、人と人との距離が3m未満であることを示せ。

正方形の部屋を4つに分割すると、一辺が2mの正方形の部屋が4つできる。部屋数を「巣」、人数を「鳩」とすると鳩ノ巣原理より、必ずどこかの部屋に二人以上の人が存在する。また、その2人の最大距離を考えると、正方形の対角線になる。対角線の長さは$2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ よって$2\sqrt{2}\fallingdotseq 2\times 1.14=2.28<3$
このことにより、ヒトとヒトとの距離は3m未満である。

練習問題1
3×3の9マスの中に、1,2,3のどれかを書く。このとき、それぞれの縦、横、斜めの和のうち、一致するものが存在することを示せ。

縦,横,斜めの数は8個。3マスの中に1,2,3を、合計した和が被ることなく入る総数は7通り。よって、縦,横,斜めの数を「鳩」、3マスの中に1,2,3を入れる総数を「巣」とすると鳩ノ巣原理より、縦、横、斜めの和のうち、一致するものが存在する。

練習問題2

xy平面上に互いに異なる5個の格子点(x座標,y座評どちらも整数となる点)を任意に選ぶと。その中に、2つの格子点を結ぶ線分の中点がまた格子点になるような2点が存在することを示せ。

2つの格子点(x, X) (y, Y)の中点は$(\frac{x+y}{2}, \frac{X+Y}{2})$。この点も格子点になるのは、

$x + y, X + Y$が偶数のとき。また2数の和が偶数となるのは偶数 + 偶数か奇数 + 奇数。

格子点の取りうるの偶奇の場合の数は(偶数,偶数) (偶数,奇数) (奇数,偶数) (奇数,偶数)の4通り。本問は異なる5つの点を選ぶので、「巣」を偶奇の場合の数、「鳩」を異なる5つの点とすると、鳩ノ巣原理より、偶奇が一致する2点が必ず存在するため、中点も格子点になるような2点は存在する。

発展問題1

6人いれば互いに知り合いの3人か互いに知り合いでない3人が必ず存在することを示せ。

六人をそれぞれA,B,C,D,E,Fとする。3人で一組と考えると、どこか一組でも題意を満たす組が存在することを示したい。まずAを基準にして考える。(以降 知り合いを「有」知り合いでないことを「無」と略記する。)残りの五人を有か、無か、で二つに分けたとき必ず多い方は3人以上になる。(例えば、B,C,Eが有でD,Fは無なら有が3人以上、B.Dが有でC,E,Fが無なら無が3人以上いる。)このことは、鳩ノ巣原理より明らかである。有か無の二つの「巣」に5人の「鳩」を入れため、どちらか一方は3羽以上の鳩が存在する。この3人以上の方に注目する。(今回はAとB,E,Fが有でC,Dが無とする。)
このとき、BとE,BとF,EとF の3つのうちどれか一つでも有があれば、(AとB,AとE,AとFは有より)題意を満たす。また3つとも無だとしても、B,E,Fの3人が無よりこれもまた題意を満たす。もし5人の内3人以上

が無の場合は、これと逆のことを同様にすればよく、また基準を変えたとしても有か無かで分けたとき必ず片方は3人以上になるので、同様のことをすれば題意を満たす。よって、6人いれば互いに知り合いの3人か互いに知り合いでない3人が必ず存在することが示せた。

補足

今回は文字だけで解答を記しましたが、とても分かりづらいと思います。分かりやすく解くとしたら、まず6人を頂点とした、六角形を書く。頂点同士を知り合いならば赤色、知り合いでないならば黒色という風に区別をつける。そうすることで、3人が知り合いならば赤色の、3人が知り合いでないならば黒色の、三角形ができることを示す、という風にグラフとして捉えて問題を言い換えるとスッキリするはずです。また、この問題を一般化したもので、ラムゼーの定理が背景問題としてあります。気になる人は調べてみてね。

発展問題2

二人以上いると知り合いの数が同じ二人が存在することを示せ。

解答

まず、n人($n \geq 2$)いるとする。このとき、少なくとも必ず知り合いの数が同じ人がいることを示したい。なにかの存在を証明するので鳩の巣原理で考えてみる。まず「鳩」は人数として、n人。「鳩」は知り合いの人数として、誰も知らない0人から自分を除いて全員を知っているn-1人までの、n個。しかし、全員の知っている人数が異なる場合、知り合いの数が0人の人と、全員知っているn-1の人がいることになるが、誰も知らない人と全員知っている人が同時にいることはありえないので、全員の知っている人数が異なることはない。よって、鳩の巣原理より、必ずどこかの巣に2羽以上の鳩が存在するため、二人以上いると知り合いの数が同じ二人が存在することが示された。

6. 参考文献ならびに参考Webページ

改訂版数学A　数研出版
詳説数学A　啓林館
数学A Advanced　東京書籍
Focus Gold数学Ⅰ＋A　4th Edition　啓林館
NEW ACTION LEGEND 数学Ⅰ＋A　東京書籍
全国大学入試問題正解　数学　国公立大編　2019年度受験用　旺文社
全国大学入試問題正解　数学　国公立大編　2020年度受験用　旺文社
全国大学入試問題正解　数学　国公立大編　2021年度受験用　旺文社