研究班番号【94】

球面上における三角形における重心について

数学班：木村洸己、熊崎典之

要約

本論文では、球面三角形における3中線が交わるときその交点を重心としたとき、その重心について、存在証明及び、各中線をどのような比で内分するかを調べた。実験の結果、対称性を持つ球面三角形において、重心が存在することが証明できた。また、重心が各中線を内分した比は一定に決まらなかった。この結果から、条件をつけた球面三角形において重心が存在することがわかった。また、球面三角形では平面の三角形のように重心が各中線を一定の比で内分しない事がわかった。

1．はじめに

球面上（非ユークリッド幾何）では三角形の総和が270度の物もあったり、二角形が存在するなど、学校で習うようなユークリッド幾何とは違う性質を持っている。そこで球面上の図形について、既知の平面上の図形（ユークリッド幾何）とは違う革新的な発想に将来性を感じた。この研究では、球面三角法の理解を深め、それを用いて平面上で存在する重心に相当するものが球面上に存在するのかを調べる。

2．仮説

球面三角形において3中線が一点で交わる時、その点をその三角形の重心と定義する。

≪仮説１≫

全ての球面三角形において重心が存在する。

≪仮説２≫

重心が各中線を内分した比は一定、もしくは規則的な変化をする。

≪実験１≫

球面上の三角形における公式、正弦法則や余弦法則などを用いての存在証明。最初に条件を絞った三角形から考え、少しずつその条件を外していき、一般化していく。

≪実験２≫

半径が1の球面に各頂点をA,B,Cとする球面三角形をおく。この三角形にAB=AC=π/2,角ABC=角ACB=90°、という条件をつけ、重心をGとおく。A,Bからのびる中線と、BC,CAとの交点をそれぞれM,Nとおく。AG=x,GM=yとおく。また、角ABNをαとおく。ここで、球面上の座標を打ち込むことで2点間の距離などを求められるサイトを用いて、直接長さや角を求める。角BAC（角Aとする）の大きさを0＜角A＜πの範囲で変化させたときにxとyの比、角α、yの大きさがそれぞれどのように変化するかを見る。それをもとに長さの比や、角の大きさの変化の仕方に規則性が無いか探す。

3．結果

≪実験１≫

三つの角が全て90°の三角形、二つの角が90°の三角形、二つの角が等しい三角形において、存在証明ができた。以下は本実験で最も一般化できた二つの角が等しい三角形における重心の存在証明である。

≪証明≫

球面三角形ABCにおいて∠ABC＝∠ACBとする

またAB,BC,ACの中点をそれぞれF,D,Eとし、ADとFCの交点をp、ADとEBの交点をqとする

さらに、AB+AC＜πとする

三角形BCFと三角形CBEにおいて

仮定より∠FBC=∠ECB

BCは共通

また余弦法則より、

sinAC/sin∠FBC=sinAB/sin∠ECB

sinAC=sinAB

AC=AB

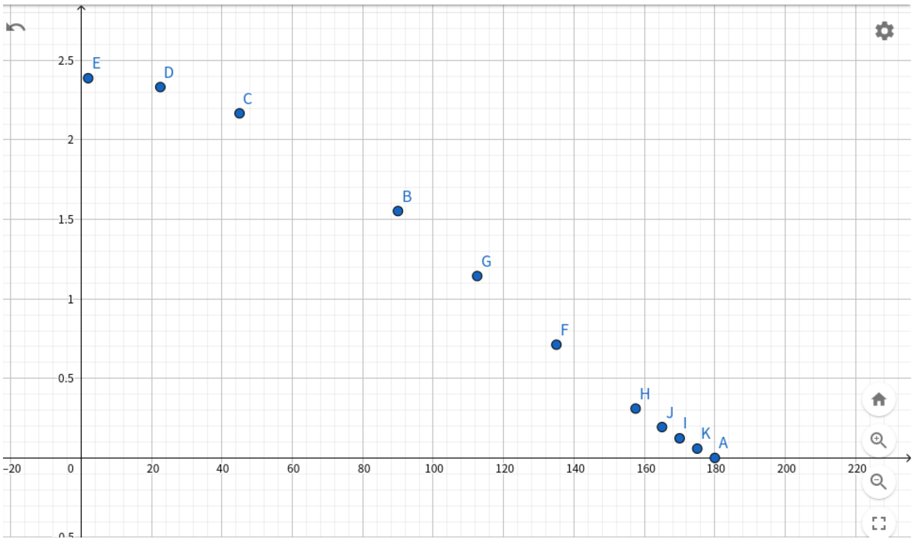
よってFB=EC

故に1つの角とその両辺がそれぞれ等しいので三角形BCFと三角形CBEは合同である
また三角形BDqと三角形CDpにおいて
　∠qBD=∠pCD
　∠qDB=∠pDC
　BD=CD
故に2つの角とその間の辺がそれぞれ等しいので三角形BDqと三角形CDpは合同である
よってpD=qDよりpとqは一致するので
球面三角形ABCにおいて重心は存在する■

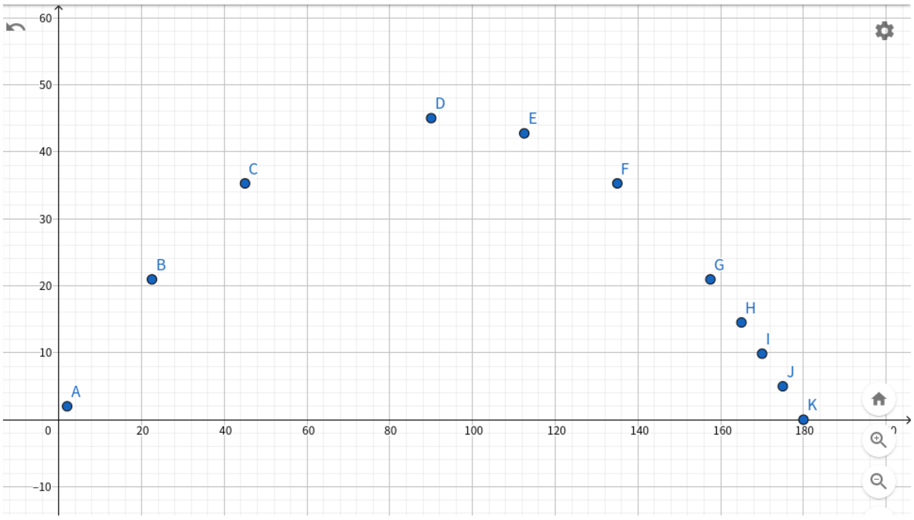
さらに条件を外した、一つの角が90°の三角形と象限三角形ではできなかった。
≪実験2≫
実際に出た数値を表にしたのが下の表だ。

角A(°)	x/y	角α（°)	y（x+y=90)
2	2.38746502442	1.998783	26.568540
22.5	2.33181710975	20.94102	27.012287
45	2.16655231308	35.26439	28.422070
90	1.55214963310	45	35.264390
112.5	1.14354823301	42.73421	41.986459
135	0.71197848902	35.26439	52.570754
157.5	0.31032530223	20.94102	68.685234
165	0.19411985134	14.510819	75.369319
170	0.12342669708	9.851076	80.112036
175	0.05864654861	4.981069	85.014120
180	0.00000000000	0	90.000000

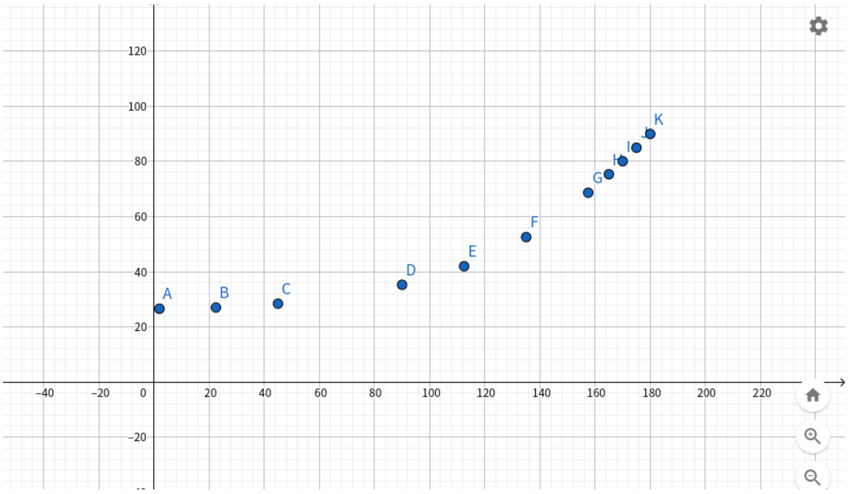
そしてこの図をそれぞれグラフに表すと下のようになる。



グラフ①　縦軸：x/y、横軸：角A



グラフ②縦軸:角 α 、横軸:角A



グラフ③縦軸:y、横軸:角A

4. 考察

方法1はもっと時間が有ればさらに一般化することができる可能性がある。

方法2のグラフ②からは、角 α は角Aの値が90° の部分を軸に線対称になっていることが読み取れる。一方でxとyの比についてグラフから規則性を読み取ることは難しかった。今回は角Aを変化させたときのxとyの比、角 α 、yの大きさについて調べたが、AMの内分の比だけでなく、BNを内分する比についてなど別の目線から調べることで研究が進む可能性があると考えた。

5. 結論

対称性がある球面三角形においては、重心に相当するものが存在することが分かった。また中線を重心で内分した時の比は、平面上と違い一定の比にならなかった。今後一つの角が90° の三角形においての重心の存在証明や、どの角も90° でない三角形においての重心の存在証明を進めたい。また、グラフから式を発見できれば、1つの情報から他の情報を簡単に求められると考えられる。

6. 参考文献ならびに参考Webページ

2点間の距離と方位角-高精度　https://keisan.casio.jp/exec/system/1257670779
球面三角形の簡潔かつ体系的な理解への試み　https://www.gsi.go.jp/common/000213916.pdf