研究班番号【７２】

公式による三次方程式の解の導出とそのための条件

数学班：文珠 壮太　原 孝太

要約

本研究の目的は三次方程式の解の公式の導出の分かりにくい部分を明らかにすることである。この調査によって、解の公式の導出で使われる u と v がある条件の下で共役であるということが結論づけられた。

Abstract

The purpose of this study is to clarify the ambiguity of the derivation of the formula for the solution of the cubic equation.
The investigation concluded that u and v used in the derivation of the solution formula are conjugate under certain conditions.

1. 序論

三次方程式にも二次方程式のような解の公式が存在することを知り、興味を持った。そこで、三次方程式の解の公式の導出過程を調べ、解の数式に現れる様々な数式の関係を考察した。

2. 研究手法

① 係数が実数である三次方程式に対して立方完成をすることで式の形を変換する。

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

両辺を a で割ると

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

$x = y - \frac{b}{3a}$ を代入して展開して整理すると

$$y^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2}\right)\mathrm{y} + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0$$

ここで、文字 p ,q を用いて表すと

$$y^3 + py + q = 0$$

$$\left(\ p = -\frac{b^2}{3a^2}\ \ , q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\ \right)$$

② 変換された方程式の解 y を $y = u + v$ のように２つの文字で置く。

これを代入してできた式から u ,v の満たす条件を求める。

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0$$

これを満たす $(u\ ,v)$ の組の１つを求めるには $\begin{cases} u^3+v^3+q=0 \\ 3uv+p=0 \end{cases}$

すなわち，$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\frac{p^3}{27} \end{cases}$ をみたす $(u\ ,v)$ の組を求めれば良い。

③ 上の条件の２つの文字 $u^3\ ,v^3$ について、解と係数の関係を用いることにより $u^3\ ,v^3$ を二次方程式の解として表す。

$\alpha=u^3\ ,\beta=v^3$ とすると $\begin{cases} \alpha+\beta=-q \\ \alpha\beta=-\frac{p^3}{27} \end{cases}$

④ ③で出た $u^3\ ,v^3$ をうまく足し合わせて変換された方程式の解を出す。

$\alpha\ ,\beta$ を解とする方程式は $t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0$ と表されるから

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$$

これを t について解くと

$$t=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$$

この式の２つの解は u^3 と v^3 を表しているので

$$u^3=\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}\ ,v^3=\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$$

と表せる。このように表しても一般性は失われない。

したがって $uv=-\frac{p}{3}$ を満たす三乗根の組み合わせの１つを

$$u=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}}\ ,v=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}} \qquad \left(p=-\frac{b^2}{3a^2}\ ,q=\frac{2b^3}{27}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}\right)$$

と表す。以下 $u\ ,v$ を $\sqrt[3]{+}\ ,\sqrt[3]{-}$ と表記する。

$uv=-\frac{p}{3}$ を満たす三乗根の組み合わせの１つを $(u,v)=\left(\sqrt[3]{+}\ ,\sqrt[3]{-}\right)$ とおいたので、

すべての組み合わせは

$$(u,v)=\left(\sqrt[3]{+},\sqrt[3]{-}\right)\ \left(\sqrt[3]{+}\omega,\sqrt[3]{-}\omega^2\right)\ \left(\sqrt[3]{+}\omega^2,\sqrt[3]{-}\omega\right)$$

※uv の組み合わせが $\omega^3=1$ となるように調節してある

ここで $y=u+v,x=y-\frac{b}{3a}$ なので

$$x=u+v-\frac{b}{3a}$$

$$(u,v)=\left(\sqrt[3]{+}\ ,\sqrt[3]{-}\right)\ \left(\sqrt[3]{+}\omega\ ,\sqrt[3]{-}\omega^2\right)\ \left(\sqrt[3]{+}\omega^2\ ,\sqrt[3]{-}\omega\right)$$

⑤ 解を変換される前の形に戻す。

$$x=\begin{cases}\sqrt[3]{+}+\sqrt[3]{-}-\dfrac{b}{3a}\\ \sqrt[3]{+}\omega+\sqrt[3]{-}\omega^2-\dfrac{b}{3a}\\ \sqrt[3]{+}\omega^2+\sqrt[3]{-}\omega-\dfrac{b}{3a}\end{cases}$$

$$\sqrt[3]{+}=\frac{\sqrt[3]{-27a^2d+9abc-2b^3+\sqrt{(27a^2d-9abc+2b^3)+4(3ac-b^2)^3}}}{3a\sqrt[3]{2}}$$

$$\sqrt[3]{-}=\frac{\sqrt[3]{-27a^2d+9abc-2b^3-\sqrt{(27a^2d-9abc+2b^3)+4(3ac-b^2)^3}}}{3a\sqrt[3]{2}}$$

⑥ $\sqrt{(27a^2d-9abc+2b^3)+4(3ac-b^2)^3}$ が負になる三次方程式の例を考える

$x^3-3x=0$（解：$x=0,\pm\sqrt{3}$ ）における u,v は

$$u=-i\ ,\frac{i+\sqrt{3}}{2},\frac{i-\sqrt{3}}{2}\quad ,\qquad v=i\ ,\frac{-i+\sqrt{3}}{2}\ ,\frac{-i-\sqrt{3}}{2}$$

となり、u と v の組み合わせは計算すると

$$(u,v)=\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2},\frac{-i+\sqrt{3}}{2}\right)\ ,\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\ ,\frac{-i-\sqrt{3}}{2}\right)\ ,(-i\ ,\ i)$$

の 3 通りの組み合わせしかないことが分かった

よって、この例において u と v の組み合わせは共役な解の組み合わせに限られていることが分かる。

一般の三次方程式の解の導出でも u と v の組み合わせも 3 通りにしぼられていたので、どの場合でも共役な解の組み合わせに限られると考えた

⑦ u と v が共役な組み合わせになることの証明

導出過程の解の公式 $t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$ まではどの三次方程式でも導けるので

$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$ の部分から証明をする

この式の２つの解は u^3 と v^3 を表している

$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$ の判別式を D とすると、$D\geqq 0$ のとき u^3 と v^3 は実数である

次に $D<0$ のとき u^3 と v^3 は実数ではなくなる

このとき $u^3=r^3(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく

$D<0$ より虚数 u^3 は大きさをもつので $r>0$ である

また $u^3+v^3=-q$ より $-q\left(\mathrm{q}=\frac{2b^3}{27}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}\right)$ は実数であり、u^3とv^3は実部が同じで虚部の符号が異符号なので u^3 と v^3 は共役である

よって $v^3=r^3(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$ とおくことができる

ここで、複素数の掛け算は次のように表される

$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$、 $\beta = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$とすると

$$\alpha\beta = rR(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = rR(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi))$$

したがって

$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$,$u^3 = r^3(\cos\theta + i\sin\theta)$,$v^3 = r^3(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ より

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} = r^6(\cos(\theta-\theta) + i\sin(\theta-\theta)) = r^6(\cos 0 + i\sin 0) = r^6$$

$$-\frac{p^3}{27} = r^6$$

$$-\frac{p^3}{27} = r^6$$

$$r^6 + \frac{p^3}{27} = 0$$

$$\left(r^2 + \frac{p}{3}\right)\left(r^4 - \frac{p}{3}r^2 + \frac{p^2}{9}\right) = 0$$

よって $r^2 + \frac{p}{3} = 0$ または $r^4 - \frac{p}{3}r^2 + \frac{p^2}{9} = 0$

$r^4 - \frac{p}{3}r^2 + \frac{p^2}{9} = 0$ のとき $r^2 = R$ とおくと $R^2 - \frac{p}{3}R + \frac{p^2}{9} = 0$ となる

$R^2 - \frac{p}{3}R + \frac{p^2}{9} = 0$ の判別式を D'とすると $D' = \frac{p^2}{9} - 4 \times \frac{p^2}{9} = -\frac{3p^2}{9}$

p は実数より$-\frac{3p^2}{9} \leqq 0$ すなわち $D' \leqq 0$

$D' = 0$ のとき $D' = -\frac{3p^2}{9} = 0$ となり $p^2 = 0$ すなわち $p = 0$

$\mathrm{R} = \frac{\frac{p}{3} \pm \sqrt{-\frac{p^2}{3}}}{2} = 0$ から $r^2 = 0$

よって $r = 0$ となり $r > 0$ に反するため不適

また、$D' < 0$ のとき R が虚数となるので不適

よって $r^4 - \frac{p}{3}r^2 + \frac{p^2}{9} = 0$ ではないので $r^2 + \frac{p}{3} = 0$ のときについて考える

$D = q^2 + \frac{4}{27}p^3 < 0$ より $p^3 < -\frac{27}{4}q^2$

p と q は実数より $p < 0$ となり $r^2 = -\frac{p}{3}$ を満たす正の実数 r がたしかに存在する

ド・モアブルの定理より、$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ であるから

$u^3 = r^3(\cos\theta + i\sin\theta)$ について考えると

$r > 0$ より $u = r\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right)$ $(k = 0,1,2)$ となる

$u \neq 0$ ， $uv = -\frac{p}{3}$ より $v = -\frac{p}{3u}, r^2 = -\frac{p}{3}$ であるから

$$v = \frac{r^2}{u} = \frac{r^2}{r\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right)} = \frac{r}{\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right)}$$

$$= \frac{r}{\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right)} \times \frac{\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right)}{\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right)}$$

よって $v = r\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right)$

ここで $u = r\left(\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2}{3}k\pi\right)\right)$

u と v において、対応する k は同じなので u と v は共役複素数の関係となる

3. 結果

既知の大定理である三次方程式の解の公式に表れる数式の意味を理解することができた。さらに、その導出過程における二次方程式の判別式が負になるとき、解を構成する u と v は共役複素数の関係となることが分かった。

4. 考察

立方完成、三乗根、二次方程式の計算をうまく組み合わせて解の公式が得られることが分かった。立方完成した形の式で因数分解できないものは解を求めるのにこの公式が必要になる。

5. 結論

複雑な導出過程を学ぶことで三次方程式の解の公式への理解を深めることができた。
特に導出過程の二次方程式の判別式が負になるとき、虚数の３乗根を考える必要が生じ、計算が難しくなるが、その状況下でも解の算出過程を理解することができた。

6. 参考文献

予備校のノリで学ぶ「大学の数学・物理」／『３次方程式の解の公式(カルダノの公式)』
https://www.youtube.com/watch?v=d_fyW_fTbTk