研究班番号【７８】

ｎすくみじゃんけんの数学的考察

～なぜじゃんけんは最高のゲームなのか～

数学班：中川 明彦

要約

従来の３すくみのじゃんけんと新たに考案した５すくみじゃんけんでは例として挙げた３人の全員の順位が決まるまでの場合において、５すくみじゃんけんの優位性が証明された。このことを拡張することで将来的には様々な場合における最適なｎすくみじゃんけんを提案する。

Abstract

In the conventional 3 freezing rock-paper-scissors and the newly devised 5 freezing rock-paper-scissors, the superiority of 5 freezing rock-paper-scissors was proved until theranking of all three people mentioned as an example was decided.

By extending this, we will propose the optimum n freezing rock-paper-scissors in various cases in the future

１．研究手法

３すくみじゃんけんでの平均回数と５すくみじゃんけんの平均回数を調べる。ここでは３人の順位が決まるまでじゃんけんを繰り返すものとする。

❶３すくみじゃんけんの場合

① ３人でじゃんけんをすると２人と１人に分かれる確率は

$$1-\frac{3+3!}{3^3}=\frac{2}{3}$$

よって２人と１人に分かれるまでの平均回数は$\frac{3}{2}$回であるといえる。

② 次にその 2 人のなかでまた順位が決まる確率は

$$1-\frac{3}{3^2}=\frac{2}{3}$$

よって 2 人の中で順位が決まるまでの平

均回数は$\frac{3}{2}$回であるといえる。

③ ①、②より３すくみじゃんけんでの３人の順位が決まるまでのじゃんけんの平均回数は

$\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$　より３回

❷５すくみじゃんけんの場合

- Combination や Permutation を使って計算すると計算式が複雑になるので、漸化式を使って、計算しようと思う。

① 全員の順位が一度に決まる場合は５通り、３人いるので３の階乗をかける。全体の場合は 5^3 通り。

$$\frac{30}{5^3}=\frac{6}{25}$$

② あいこになる場合は全員が同じ手を出すか、例えばＡとＢとＤのような特定の手を出したとき、あいことなって勝負がつかない。

(1)全員が同じ手を出す場合

全員同じ手を出すので５通り。よって$\frac{1}{25}$

(2)特定の手を出す場合、

特定の場合は(A,B,D),(A,C,E),(A,C,D)(B,C,E)(B,D,E)の５通り

３人いるので３の階乗をかけて確率を求めると　$\frac{6}{25}$

よってあいこになる確率は　$\frac{6}{25}+\frac{1}{25}=\frac{7}{25}$　となる

③ １人の順位が決まり２人の順位が決まらない場合

言い換えれば、誰かが独り勝ち、又は誰かが独り負けする確率

この確率は余事象の考え方を使って導出する

$1-\frac{7}{25}-\frac{6}{25}=\frac{12}{25}$

④ ｎ回目に全員の順位が決まる確率をP_nとする

またｎ回目の５すくみじゃんけんが終わった後に３人残っている確率をa_n、２人と１人に分かれている確率をb_nとする

- $a_n=\left(\frac{7}{25}\right)^n$　　$b_{n+1}=\frac{12}{25}a_n+\frac{1}{5}b_n$

また$b_1=\frac{12}{25}$　これを解いて　$b_n=6\left\{\left(\frac{7}{25}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$

- $P_n = \frac{6}{25} a_{n-1} + \frac{4}{5} b_{n-1}$

$$= \frac{6}{25}\left(\frac{7}{25}\right)^{n-1} + \frac{24}{5}\left\{\left(\frac{7}{25}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= 18 \cdot \left(\frac{7}{25}\right)^{n} - 24 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n}$$

- 平均回数は定義より

$$\sum_{n=1}^{\infty} n P_n$$

$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 18n\left(\frac{7}{25}\right)^n$　　$T_n = \sum_{n=1}^{\infty} 24n\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$= \frac{175}{18}$　　　　$= \frac{15}{2}$

- $P_n = S_n - T_n$よりよって$\frac{175}{18} - \frac{15}{2} = \frac{20}{9}$

- $\frac{20}{9} < 3$より５すくみじゃんけんのほうが効率的と

いえる

２．結論と考察と今後の展望

中川じゃんけんは従来のじゃんけんより決着がつきやすいことが証明されたが、直感的に勝敗が分かりにくいのが難点である。

今後はｎすくみの場合を考えていこうと思う

３．参考文献

中村義作　（1982）「遊びの確率論」