

面の大小関係から暴く多面体の秘密

数学班：天野 稲哉 原田 秀馬

要約

本研究では、「 n 面体の任意の一面の面積は他の $n-1$ 面の面積の和より小さい」ということの証明を試みた。面の数が4以上の自然数であること、面はすべて繋がっていることから数学的帰納法や正射影の考え方をを用いることによって、「 n 面体の任意の一面の面積は他の $n-1$ 面の面積の和より小さい」ということが結論付けられた。

Abstract

In this study, we tried to prove that “The polyhedron of any face of area is smaller than the other face of total area.” The number of the surface is more than four natural numbers, and any face is connected with others, we concluded that “The polyhedron of any face of area is smaller than the other face of total area.” using Mathemadical induction and Orthographic projection.

1. 序論

「立方体をどのように切頂すると表面積が最大になるのか」ということについて研究していると「四面体では任意の一面の面積が他の三面の面積の和より小さい」ということがわかり、「立方体を切頂しないと表面積が最大になる」ということがわかった。このことから「 n 面体の任意の一面の面積は他の $n-1$ 面の面積の和より小さい」（この命題を本題と呼ぶことにする）と考え、この証明をした。

2. 証明方法

(1) 数学的帰納法を用いて証明する

全ての多面体は辺をまたがずに四面体に分割できると仮定し、多面体の面の数が4以上の自然数であることから数学的帰納法を用いて本題を証明する。このとき、多面体を四面体に分割し、分割した四面体を合わせると面の数が2つずつ増えていくことから、

- ① $n = 4$ のとき
- ② $n = 5$ のとき
- ③ $n = k$ (k は4以上の自然数) のとき

この3つの場合で4以上の全ての自然数で本題が成り立つことを証明する。

① $n = 4$ のとき

四面体の1つの頂点からその他の頂点がなす平面に垂線を下ろし、その交点とその他の頂点を結び面（この面を面1、他の面を面2、面3、面4とする）を3つに分割する。このとき、

四面体は3つの三角錐に分割できる。この三角錐は2つの面が直角三角形であるから、その2つの面の共通する辺が三角錐の高さとなるように考えると残りの2つの面は三角錐の底面と斜面となる。ここで、底辺は共通であり、三平方の定理より斜面の高さは底面の高さより高い。よって斜面の面積は底面の面積より大きい。3つの三角錐を合わせるとそれぞれの三角錐の底面は面1、斜面は面2～4となるから本題が証明された。

② $n = 5$ のとき

このとき立体の種類は2つある。

(I) 四角錐のとき

①と同様にして証明できる。

(II) 三角柱のとき

三角柱の6つの頂点のうち三角柱の三角形の面の3つの頂点全てを選ばないように3つの頂点を選び、その面で三角柱を切る。すると、三角柱は四角錐と四面体に分けることができる。ここで、四角錐と四面体では①、②(I)より本題を満たしていることがわかるからこれらを合わせることで本題が証明できる。

③ $n = k$ のとき本題が成り立つと仮定する。

多面体に四面体を組み合わせると面が2つ増えていくことから $n = k + 2$ のとき本題が成り立つことを証明できればよい。

ここで、 k 面体では仮定より、四面体では①より本題を満たしていることがわかるからこれらを合わせることで本題が証明できる。

①～③より4以上の全ての自然数で本題が成り立つから、全ての多面体で本題が成り立つ。

(2) 正射影の考えを用いて証明する

多面体の最大面に向かって光を最大面に垂直に当てる。最大面以外の面の影の面積が最大面の面積以上であることを証明する。

最大面の面積を S_{max} 、最大面以外の面積の和を S 、最大面以外の面の影の面積を S_{sin} とすると、まず影は正射影であり、 $S = S_{sin}$ とはならないから $S > S_{sin} \cdots (a)$

次に、面はすべて繋がっているから影は最大面を全て覆う。よって $S_{sin} \geq S_{max} \cdots (b)$

(a)、(b)より $S > S_{max}$ が成り立つから本題が証明された。

3. 結果

仮定が正しければ本題を証明できた。また、正射影の考えを用いると仮定が正しくない場合でも本題を証明できた。

4. 考察

辺をまたがずに多面体を四面体に分割するという仮定によって面が分割されなくなり、面積の大小を比較しやすくなった。また、面の数が4以上の自然数であることから数学的帰納法を用いることができた。

5. 結論

自明と思われることの証明が難しいこともあるということを実感した。これからは仮定が正しいかどうかを調べていきたい。