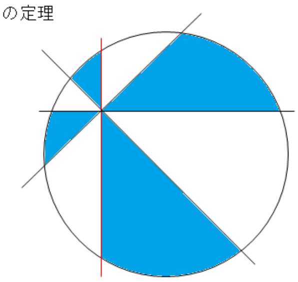
研究班番号【７６】

ピザの定理の拡張

数学班：迫 琢磨　坂下 亜聡



要約

本研究の目的は、ピザの定理を自然数等分や任意の線で二回切ってしまった後の自然数等分、また立体の自然数等分に拡張することである。研究によって、ピザの定理を自然数等分に拡張できるということがわかった。

Abstract

In the pizza theorem, we can divide a pizza in half after we cut it once. Our purpose is to prove that we can cut a pizza into any natural numbers. And another purpose is to prove that we can cut it into any natural number s after we cut it twice.

1. 序論

ピザの定理とはピザを中心を通らない任意の線で一回切った後に 4n-1（n は正の整数）本の線で等角度に切り分けていきピザを一つ飛ばしに取っていくと、切り取った面積が全体の n 分の 1 になっているという定理である。この定理から一回切った後に自然数等分できるのではないかと考えた。また、ピザの定理は任意の線で一回切ることを前提とする定理だが、ピザを 4 つの領域に分割するような 2 直線で切った時にも一回切った時と同じようなことが成り立つのではないかと考えた。さらに、円以外の平面図形や立体図形での自然数等分も考えた。この研究では、なるべく義務教育までの知識で理解できるように難解な積分などを使わず初等的な方法での証明を考えた。

2. 研究手法

一回切った後に自然数等分する証明

円と円が相似であることからカバリエリの原理を利用してピザの定理を一般化して証明する。

二回切った後に自然数等分する証明

自由度の高いピザの定理を証明し、それを用いて証明する。

立体図形の自然数等分の証明

断面で常にピザの定理が成り立つことを用いて証明する。

３．結果

１回切った後に自然数等分する証明

図１

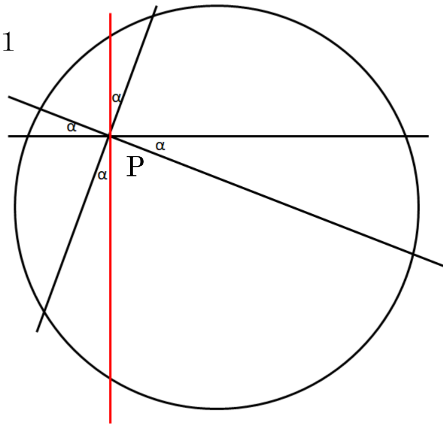


図３

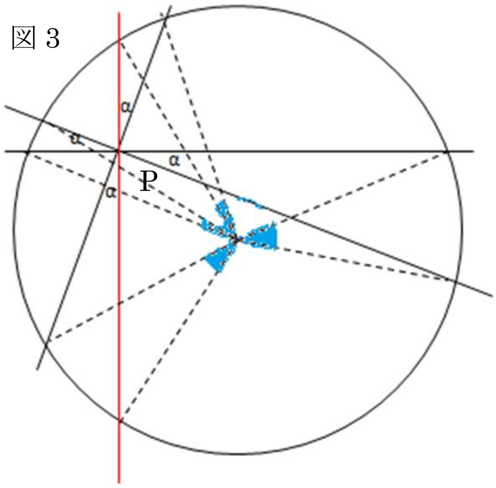


図２

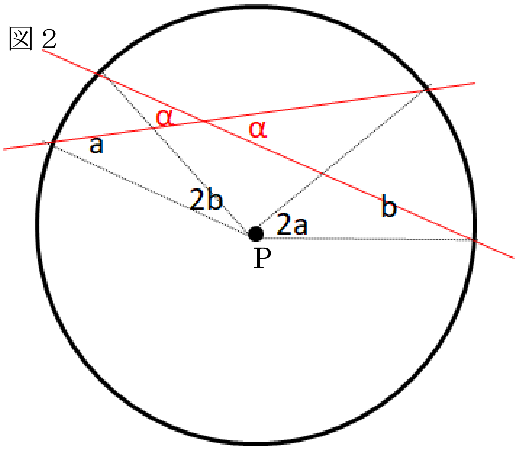


図４

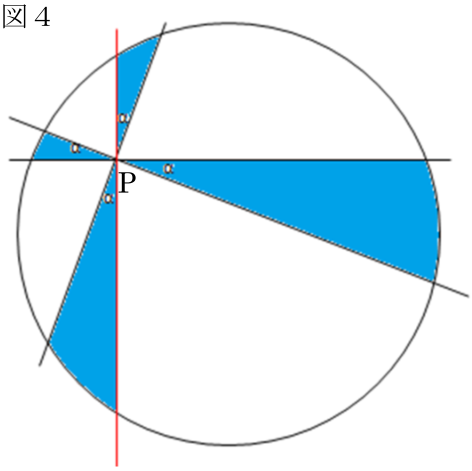
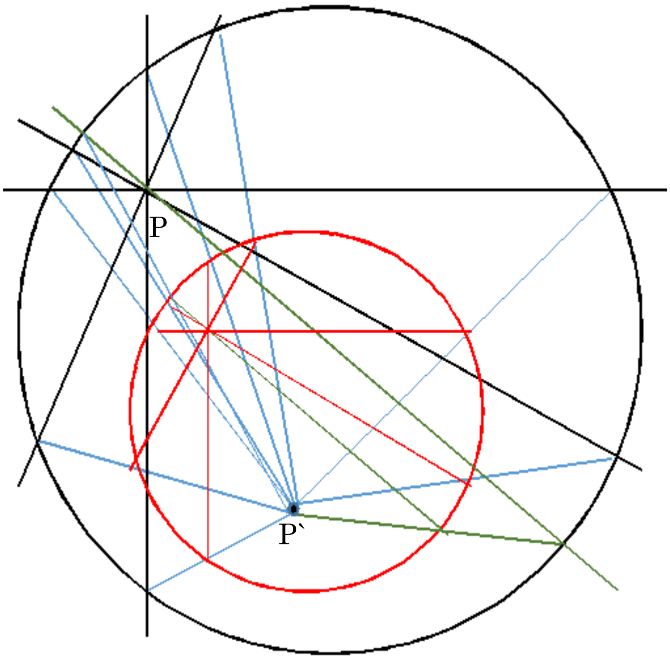


図１のように直行する２直線をα度ずらす。

ここで、図２のように中心角をとると円周角の定理より２α＝a＋b より、図３の色のついた部分の角度の合計がα／90 度になる。

ここで、点 P を相似の中心とした円を考えると、その円の円周は直行する２組の２直線によってα／90 倍の長さに切断される。よって、カバリエリの原理より図４の色のついた部分は円全体の面積のα／90 倍である。α／90　＝１／n よりα＝90／n で切断すると n 等分できる。

２回切った後に自然数等分する証明



黒の線は図１と同じとする。

円の内部に任意の点 P`とする。

ここで、直行する２組の２直線と大円の８つの交点と点 P`をむすぶ。（青の線分）

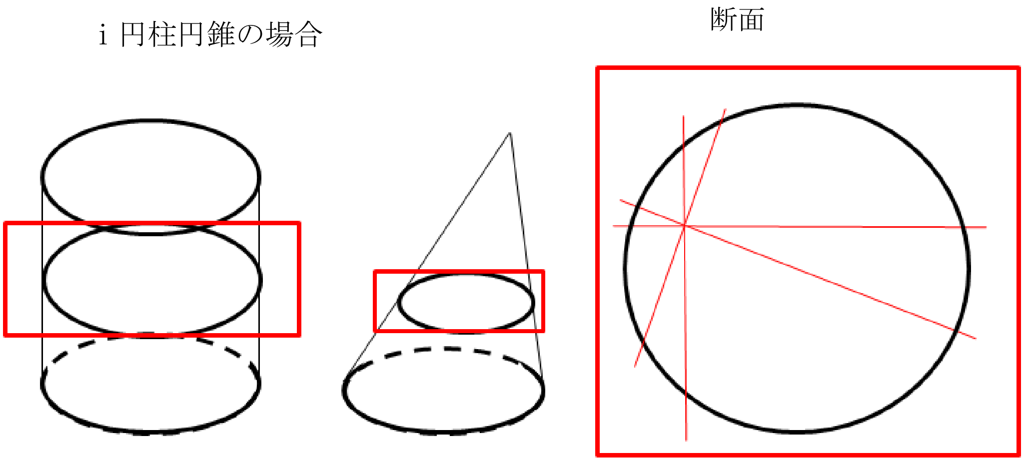
点 P`を相似の中心とする円を考える。その円と青の線分の交点を考えると点 P`を相似の中心とする黒の線と相似な図形ができる。（赤の線分）

１回切った後の証明より、黒の線の直行する２組の２直線によって切り取られる円周は全体の α／90 倍になっているので赤い線でも同様に α／90 倍になっている。

したがってカバリエリの原理より青い線分で大円を切断すると全体の α／90 倍の面積になっている。よって、α＝90／n で切断すると n 等分できる。

立体図形の自然数等分の証明

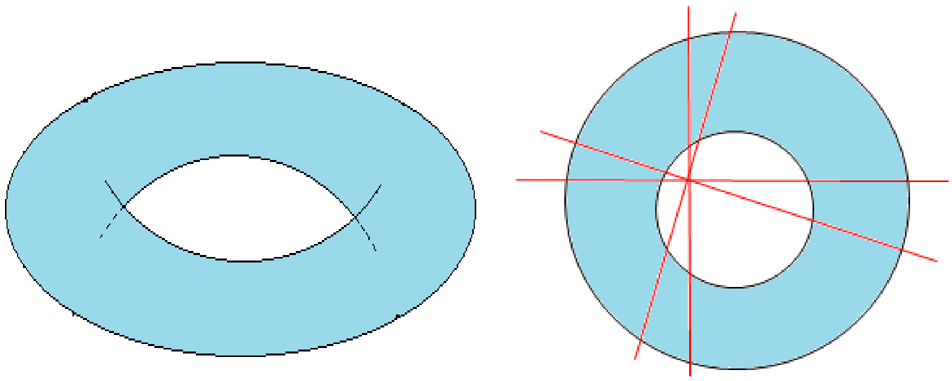
ｉ円柱円錐の場合



底面と平行な面で立体を切断すると断面は円になる。

ここで、断面においてピザの定理を適用すると断面は常に１／n に切断できるのでカバリエリの原理より体積を１／n にすることができる。（立体を切断する断面は平面だけでなく曲面も考えることができる。）

ⅱトーラスの場合



トーラスの回転軸に垂直な面で切断する。

断面は図のように円から円をくりぬいた形になる。

ここで、内側の円についてピザの定理を適用すると外がわの円でもピザの定理がなりたつのでトーラスについても自然数等分できる。

4. 考察

　カバリエリの原理を使うことによって積分を使わずに証明したが積分を使っても証明できる。また、カバリエリの原理を使う方針は切断面を考えることで示すため高次元への拡張がしやすいと考えられる。１回切断した後の自然数等分はカバリエリの原理を使わず初等幾何のみで証明することが可能であることがわかった。しかし、２回切った後の自然数等分は初等幾何のみでの証明方法は見つけられていない。

5. 結論

　ピザの定理を自然数等分、２回切った後の自然数等分、立体へ拡張することができた。

6. 参考文献

https://wagomu.hatenadiary.org/entry/20110808/1312762059