研究班番号【７５】

チェバ・メネラウスの定理の拡張

数学班：中馬 啓太

要約

本研究の目的は、立体におけるメネラウスの定理を明らかにすることである。計算によって、三角錐、双三角錐、四角錘においてメネラウスの定理の式が立てられるということがわかった。従って本研究では、ｎ角錐、双ｎ角錐においてはメネラウスの定理の式が立てられるということが結論付けられた。

Abstract

The purpose of this study is revealing Menelaus`s theorem in three-dimensional shapes. The calculation shows that the formula of Menelaus`s theorem can be made in triangular pyramid, triangular bipyramid and quadrangular pyramid. This study concludes that the formula of Menelaus`s theorem can be made in polygonal pyramid and polygonal bipyramid.

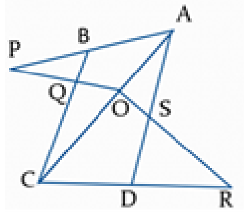
1．序論

身近にある数学の公式や定理で何か拡張できるものはあるかと探した結果、チェバ・メネラウスの定理がｎ角形に拡張されている論文を見つけた。そのため、自分はチェバ・メネラウスの定理を多面体に拡張することができたら、立体内の線分の比を求めることができ、それは立体の体積比を求めることにもつながるのではないかと考えた。そこで、本研究では多面体の中の三角形にチェバ・メネラウスの定理を当てはめてチェバ・メネラウスの定理の多面体への拡張を試みた。

2．研究手法

三角形でのメネラウスの定理と、先行研究にある四角形でのメネラウスの定理(図１)を立体上の適切な面に用いて、三角錐、双三角錐、四角錘、双四角錘でのメネラウスの定理の導出を試みた。

図 1



$$\frac{AP}{PB} \times \frac{BQ}{QC} \times \frac{CR}{RD} \times \frac{DS}{SA} = 1$$

3．結果

① 三角錐(図２)

$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RD}\times\frac{DS}{SA}=1$$

図 2

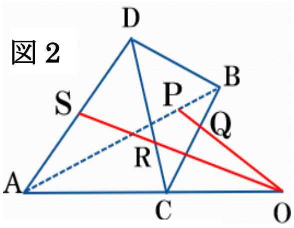
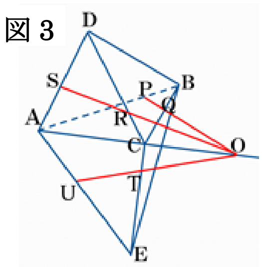


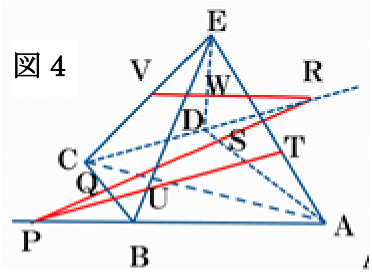
図 3



② 双三角錐(図３)

$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RD}\times\frac{DS}{SA}\times\frac{AO}{OC}\times\frac{CT}{TE}\times\frac{EU}{UA}=1$$

図 4



③ 四角錐(図４)

$$\frac{AT}{TE}\times\frac{EU}{UB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CV}{VE}\times\frac{EW}{WD}\times\frac{DS}{SA}=1$$

3．考察

立体内の適切な辺の延長線上に適当な点を置き、三角形と四角形の面にそれぞれメネラウスの定理を適用することで、三角錐、双三角錐、四角錘、に拡張できたため、底面にｎ角形のメネラウスの定理を使うことでｎ角錐、双ｎ角錐に拡張できると考えられる。

4．結論

本研究ではメネラウスの定理をｎ角錐、双ｎ角錐に拡張できることが分かったが、双ｎ角錐ではＯのような立体外の点が式の中に残ってしまっているため、立体の頂点のみを使った式を作っていくのが今後の課題である。

5．参考文献

四之宮佳彦・熊倉啓之　『チェバ・メネラウスの定理に関する教材開発―ｎ角形への拡張―』