研究班番号【７４】

四面体における内接球の存在証明

数学班：堤 雅喜　時岡 大輔　山下 孔誠

要約

本研究の目的は、内接球の性質を利用して、四面体の内接球が存在することを示し、座標空間上で内接球の中心の座標を導出することである。本研究では、すべての四面体で内接球は存在し、内接球の中心の座標が複雑になることが結論付けられた。

Abstract

The purpose of this study is to show the existence of a tetrahedral inscribed sphere by utilizing the properties of the inscribed sphere, and to derive the coordinates of the center of the inscribed sphere in the coordinate space. In this study, it was concluded that inscribed spheres exist in all tetrahedrons, and the coordinates of the center of the inscribed sphere are complicated.

1．序論

京都大学の入試で四面体の外接球の存在証明が出題されたのを見て、内接球に関しても存在証明ができるのではないかと思った。また、座標空間上に四面体を置き内接球の中心を求めようと考えた。

本研究には、内接球がどんな四面体にも存在することが証明できれば、座標空間における内接球の中心の座標を導出でき、中心の座標が求められれば、どんな四面体でも座標空間上の内接球の中心の座標の公式を作ることができることに意義がある。

2．研究手法

[1]内接球の存在証明について

平面と平面のなす角を、「二平面の交線に点をとりその点から二平面に垂直な線のなす角」(図１)と定義する。次に、平面と平面のなす角を二等分する面を二平面の角の二等分面という。二等分面上の各点から、もとの二平面への距離は等しい。

四面体 ABCD において、平面 ABC と平面 BCD の四面体内部を通る二等分面と、平面 ACD と平面 BCD の四面体内部を通る二等分面の交線を l とする。(図 2)さらに、平面 ABD と平面 BCD の四面体内部を通る二等分面と l の交わる点を I とする。(図３)点 I は四面体 ABCD 内に存在する。また、点 I はこれまでに設定した 3 つの二等分面上の点なので、I は各面からの距離が等しい。

以上のことが全ての四面体で成立するので、I が内接球の中心となり、全ての四面体に内接球が存在する。

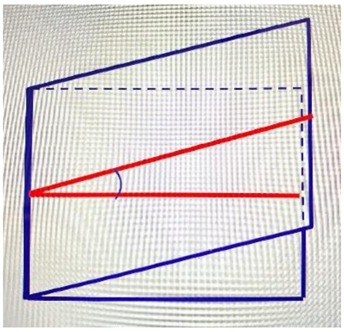

図1

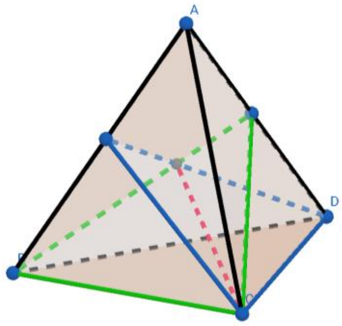

図2

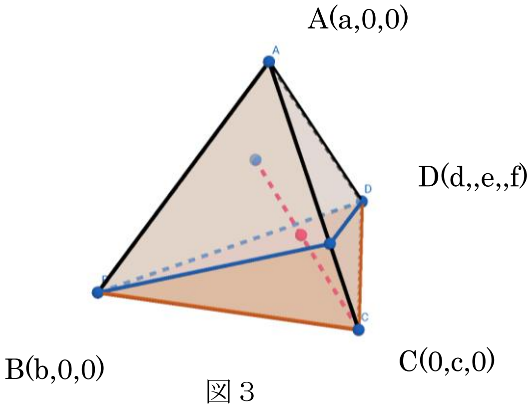

図3

[2]内接球の中心の座標について

図 3 のように座標を設定する。まず、各面を含む平面の方程式を求める。ここでは、外積を使って求める。

平面の方程式は平面 ABC : $z=0$…①平面 ABD : $(a-b)fy+(b-a)ez=0$…②平面 ACD : $cfx+afy+(ac-ae-cd)z-acf=0$…③平面 BCD : $cfx+bfy+(bc-be-cd)z-bcf=0$…④

内接球の中心を I(X,Y,Z)とする。I と①の点と平面の距離が$|Z|$で、①,②,③,④と I の距離が等しい。よって、$|Z|=\frac{|f(a-b)Y-e(a-b)Z|}{\sqrt{\{f(a-b)\}^2+\{e(a-b)\}^2}}$…⑤$|Z|=\frac{|cfX+afY+(ac-ab-cd)Z-acf|}{\sqrt{(af)^2+(cf)^2+(ac-ab-cd)^2}}$…⑥$|Z|=\frac{|cfX+bfY+(bc-be-cd)Z-bcf|}{\sqrt{(bf)^2+(cf)^2+(bc-be-cd)^2}}$…⑦

ここで、Z を以下の方法で求める。

四面体の体積を V とする。Z は内接球の半径なので、V=$\frac{1}{3}Z(\triangle ABC+\triangle ABD+\triangle ACD+\triangle BCD)$…⑧となる。

(ア)△ABC=$\frac{b(a-c)}{2}$

(イ)△ABD=$\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)f^2+(bd-ab+ae)^2}$

(ウ)△BCD=$\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2)f^2+(bd-bc+ce)^2}$

(エ)△ACD=$\frac{1}{2}(a-c)\sqrt{e^2+f^2}$

(オ)V=$\frac{bf(a-c)}{2}$

(ア)～(オ)を⑧に代入して Z について解くと、Z を導出できる。これを⑤,⑥,⑦に代入して X,Y について解き、I の座標を導出した。

3. 結果

全ての四面体に内接球が存在する。また、最終的な内接球の中心は以下になった。

$\sqrt{(b^2+c^2)f^2+(be+cd-bc)^2}Z=\left|cfX+\left(b\sqrt{e^2+f^2}+bc-cd\right)Z\right|$ を満たす X

$$Y = \frac{c(a-b)\left(e+\sqrt{e^2+f^2}\right)}{c(a-b)+\sqrt{(a^2+c^2)f^2+(ae+cd-ac)^2}+\sqrt{(b^2+c^2)f^2+(be+cd-bc)^2}+(a-b)\sqrt{e^2+f^2}}$$

$$Z = \frac{cf(a-b)}{c(a-b)+\sqrt{(a^2+c^2)f^2+(ae+cd-ac)^2}+\sqrt{(b^2+c^2)f^2+(be+cd-bc)^2}+(a-b)\sqrt{e^2+f^2}}$$

4. 考察

内接球の中心を座標で表すことはできたが、かなり複雑になったので、実用性はないと思われる。

5. 結論

内接球の中心の座標をもっと整理してきれいな形にすることや、正四面体などの決まった形での座標を求めることが今後の課題である。

6. 参考文献

2011 年度京都大学理系入学者選抜