研究班番号【６８】

確率を用いて考えるブラックジャックの戦略

数学班：児島 大樹　寺内 柊二

要約
本研究の目的は、ブラックジャックというゲームでの最適な行動を確率によって明らかにすることである。自分がカードを引くときに勝つ確率と、自分がカードを引かないときに勝つ確率によって、ディーラーの見えているカードが 10 のとき、主に自分がカードを引かないときに勝つ確率の方が高いということがわかった。従って本研究では、限られた条件の下ではカードを引かない方が良いということが結論付けられた。

Abstract
The purpose of this study is revealing the best way to win in Black Jack by using probability. The experiment shows that the probability of winning without drawing a card is higher than that of winning by drawing the card when the card that the other party has shows 10. This study concludes that we should not draw a card.

1. 序論
友達とブラックジャックで遊んでいて、最初に渡されるカードの組み合わせによって勝ちに繋がる行動は変わると思った。そして、ブラックジャックでは確率を使うことによって勝率を求めることができるのではないかと考えた。本研究ではまず、自分の最初のカードの組み合わせから次にカード引いてバースト(カードの合計が 22 以上)しない確率を求める。次に相手のカードの数をみてその数から相手のカードの合計が最終的にどうなるかの確率それぞれを求める。そして、それらを使い、最初のカードの組み合わせから自分はどのような行動をとれば勝率が 1 番高くなるのかを考えた。

2. 研究手法
今回扱うブラックジャックのルールは以下の通りとする。

・ディーラー(対戦相手)とプレイヤー(自分)の２人でプレイする。
・ジョーカーを除く５２枚のトランプからそれぞれ２枚ずつカードを引く。
　このとき、プレイヤーは２枚、ディーラーは１枚だけ数字の面を表にする。
・プレイヤーはカードの和が２１になるように１枚ずつカードを引く。
・和が２２以上になると、バーストといいプレイヤーの負けとなる。
・J(11),Q(12),K(13)は１０として扱い、A(1)は１１として扱うこともできる。
・プレイヤーのカードが５枚を超えてもバーストしなかった場合プレイヤーの勝ちとなる。
・ディーラーはカードの合計が１７以上になるまで引く。

① 自分がバーストしない確率を考える

自分の手札をX_1，X_2・・・相手の手札をY_1, Y_2とする。

（ただし、$X_1 \leqq X_2$、Y_1は見えているカードとする。）

自分が３枚目を引くときにバーストしない確率は、次のように場合分けする必要がある。

ⅰ）Y_1が欲しいカードに影響しない場合

ⅱ）Y_1が欲しいカードに影響する場合

Y_1が欲しいカードに影響しない場合のバーストしない確率を求めるためには、21 とX_1，X_2の差によって場合分けする必要があることが分かる。

$21-(X_1+X_2)=a$ とする。（ $a \leqq 9$ ）

（もし、$a \geqq 10$ ならどのカードを引いてもバーストしない）

ⅲ）$a < X_1$のとき自分の欲しいカードに０枚影響する

ⅳ）$X_1 \leqq a < X_2$ のとき自分の欲しいカードに１枚影響する

ⅴ）$X_2 \leqq a$ のとき自分の欲しいカードに２枚影響する

このように考えていく。

② ディーラーに勝つ確率を考える

ディーラーに勝つためには、

a) 自分はバーストせず、相手のみバーストする

b) 自分はバーストせず、相手より合計が大きくなる

この２通りである。

自分のバーストしない確率は、自分の分かっていないカードは 49 枚残っているので、引いてバーストしないカードは x 枚あるとして、$\frac{x}{49}$と考える。

相手がバーストする確率を A 、相手のカードの和が 17 になる確率を B 、18 になる確率を C 、19 になる確率を D 、20 になる確率を E とする。

相手がバーストするとき、

（自分がバーストしない確率）×（相手がバーストする確率）なので、$\frac{x}{49} \times A$

相手のカードが 17 になったとき、

（自分のカードの和が 18 以上 21 以下）×（相手のカードの和が 17 になる確率）なので、$\frac{16}{49} \times B$(ただし、場の状況によって 16 という数値は減少する。)

相手のカードが 18 になったとき、

（自分のカードの和が 19 以上 21 以下）×（相手のカードの和が 18 になる確率）なので、$\frac{12}{49} \times C$（ただし、場の状況によって 12 という数値は減少する。）

相手のカードが 19 になったとき、

（自分のカードの和が 20 以上 21 以下）×（相手のカードの和が 19 になる確率）なの

で、$\frac{8}{49}\times D$（ただし、場の状況によって 8 という数値は減少する。）

相手のカードが 20 になったとき、
（自分のカードの和が 21）×（相手のカードの和が 20 になる確率）なので、

$\frac{4}{49}\times E$（ただし、場の状況によって 4 という数値は減少する。）

これらは同時に起こることはないので、自分の勝つ確率を n とすると

$n=\frac{x}{49}\times A+\frac{16}{49}\times B+\frac{12}{49}\times C+\frac{8}{49}\times D+\frac{4}{49}\times E$となる。$n\geqq\frac{1}{2}$ となる、 x を考える。

以下、$Y_1=10$、$X_1+X_2\leqq 17$ の場合に限定して、自分が 3 枚目のカードを引くときの勝つ確率を考える

③ ②と同様の条件で三枚目のカードを引いて勝つ確率と引かないで勝つ確率の大小を比較する。それは $n\geqq A$ となる、x の範囲を考える。

3. 結果

① トランプは 1 つの数値により、スペード、クローバー、ハート、ダイヤの 4 種類があるので、a 以下の数のカードは $4a$ 枚ある。自分が 3 枚目を引くときにバーストしない確率はⅰ～ⅴのそれぞれにおける影響する枚数を k 枚とすると、$\frac{4a-k}{49}$ となる。

② $Y_1=10$のとき、$\mathrm{A}=\frac{2842}{10000}$　$\mathrm{B}=\frac{1149}{10000}$　$\mathrm{C}=\frac{1152}{10000}$　$D=\frac{1204}{10000}$　$E=\frac{2504}{10000}$　$F=\frac{1149}{10000}$ となる。

n のとりうる最大の値は、x＝49 のとき、n は約 0.39 となるので条件を満たす x は存在しない。

③ 自分のカードの和が 18 になるために必要なカードをｂ、19 になるために必要なカードをｃ、20 になるために必要なカードをｄ、21 になるために必要なカードをｅとすると場に出ているカードは３枚なので、結果は以下の表のようになる。具体的に言うと、自分の手札の合計が 11 のときｂ ＝7　ｃ ＝8　ｄ ＝9　ｅ ＝10となる。この時、場に 7 が２枚出ていた場合、表から$x\geqq 32$となる。

場に出ているカード								xが満たすべき条件
18~21になるために必要なカードが場に出ていない								x≧31
b	b,b	b,c	b,b,b	c	d			x≧32
b,d	b,b,c	b,b,d	b,c,c	c,c	c,d	e		x≧33
b,e	b,b,e	b,c,d	b,d,d	c,e	c,c,c	c,c,d	d,d	x≧34
b,c,e	b,d,e	c,c,e	c,d,d	c,d,e	d,e	d,d,d	e,e	x≧35
b,e	c,e,e							x≧36
d,e	e,e,e							x≧37

4. 考察

これらの結果から、自分の手札の組み合わせで、自分がバーストしないための確率を式で表すことができた。そして、相手の見えているカードが 10 であるときにはかなり限られた場面では三枚目のカードを引いたほうが勝率が高くなることがあるが、基本的には三枚目のカードを引かないほうが勝率は高くなることがわかる。

5. 結論

三枚目のカード引くときに、自分がバーストするかどうかの式はたてることができたが、今回の場合では 4 枚目以降も引いた場合を考慮できていないので、何枚も引いていきゲームが進んだ場合の確率も求められるようにしたい。また、相手の見えているカードが 10 以外でも求められるように、$A \sim E$の 10 以外の確率も求めていきたい。