無限無理関数

数学班：吉本

１．研究動機

$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\cdots}}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であることを知り、１をxに変更して関数として扱うと、疑問点が出てきたため、これについて調べることにした。

２．式の変形

$$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x\cdots}}}\quad\cdots（＊）$$

上記の式のような根号が無限に続いている式のことを、本研究では無限無理関数とよぶ。この式を変形すると、２つ目以降の$\sqrt{x}$の和もまたyと表すことができるので、

$$y=\sqrt{x+y}$$

と表され

両辺を２乗することでyの２次方程式となるので解の公式などを用いることで、両辺を２乗することで

$y=\frac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}$ （＊＊）となるが、$-\frac{1}{4}<x<0$のとき、２つの疑問が生じた。

① （＊）は虚数の和となるので、虚数のはずであるが、（＊＊）は実数である。

② （＊）は１つの数を表すが、（＊＊）は２つの数を表す。

３．研究方法

疑問①を解決するために　$a_n+b_ni=\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}}_{n個}$$(a_n,b_n$は実数$)$とおき、$a_n$と$b_n$の漸化式を求めた。$\sqrt{x}$が$n+1$個のとき$a_{n+1}+b_{n+1}i=\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x\cdots}}}}_{n+1個}$となるので

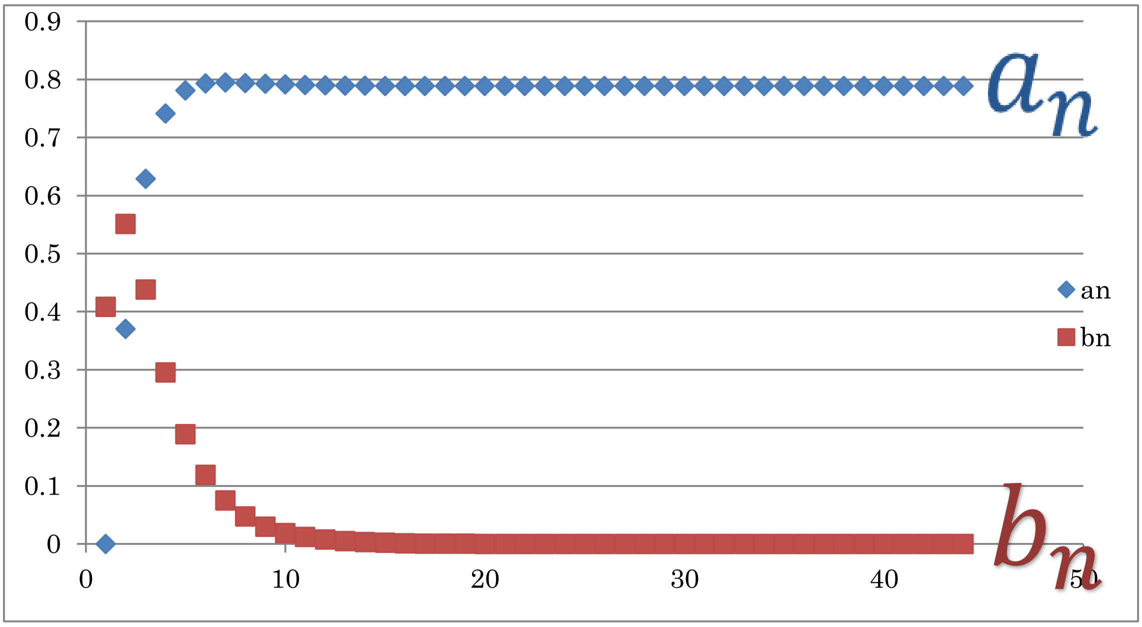
$a_{n+1}+b_{n+1}i=\sqrt{x+a_n+b_ni}$と表される。これを２乗し$a_{n+1}$と$b_{n+1}$について解くと

$$a_{n+1}=\pm\sqrt{\frac{x+a_n\pm\sqrt{(x+a_n)^2+{b_n}^2}}{2}}\quad b_{n+1}=\pm\sqrt{\frac{-(x+a_n)\pm\sqrt{(x+a_n)^2+{b_n}^2}}{2}}$$

という式が得られた。

① エクセルを用いた計算

実際に$-\frac{1}{4}<x<0$を満たす数である$-\frac{1}{6}$をxに代入して上の漸化式を用いてnの値を変化させた。



図①nの値を変化させたときのa_nとb_n推移

図①からわかるようにa_nは実際に（＊＊）に$-\frac{1}{6}$を代入した値をとりb_nは0に収束したが、a_nの値は1つしか現れなかった。

② 挟みうちの原理による証明

$a_{n+1}=\sqrt{\frac{x+a_n+\sqrt{(x+a_n)^2+{b_n}^2}}{2}}$で$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ $b_{n+1}=\sqrt{\frac{-(x+a_n)+\sqrt{(x+a_n)^2+{b_n}^2}}{2}}$で$\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$

とおき$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}, \beta=0$と仮定され両辺から$\alpha$を引く

$$a_{n+1}-\alpha=\sqrt{\frac{x+a_n+\sqrt{(x+a_n)^2+{b_n}^2}}{2}}-\alpha$$

分子の有理化をすると
$$=\frac{\frac{x+a_n+\sqrt{(x+a_n)^2+{b_n}^2}}{2}-\alpha^2}{\sqrt{\frac{x+a_n+\sqrt{(x+a_n)^2+{b_n}^2}}{2}}+\alpha}$$

これの分子に$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}, \beta=0$を代入すると

$$x+a_n-\left(\frac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}\right)^2=a_n-\left(\frac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}\right)=a_n-\alpha$$となる。

また$\sqrt{\frac{x+a_n+\sqrt{(x+a_n)^2+{b_n}^2}}{2}}$は正の数であるので$0<\frac{1}{\sqrt{\frac{x+a_n+\sqrt{(x+a_n)^2+{b_n}^2}}{2}}+\alpha}<\frac{1}{\alpha}$となる。

$$\therefore |a_n-\alpha| = \frac{1}{\sqrt{\frac{x+a_n+\sqrt{(x+a_n)^2+{b_n}^2}}{2}}+\alpha}|a_{n-1}-\alpha| < \frac{1}{\alpha}|a_{n-1}-\alpha|$$

これを繰り返し行い　　　$|a_n-\alpha| < \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}|a_1-\alpha|$

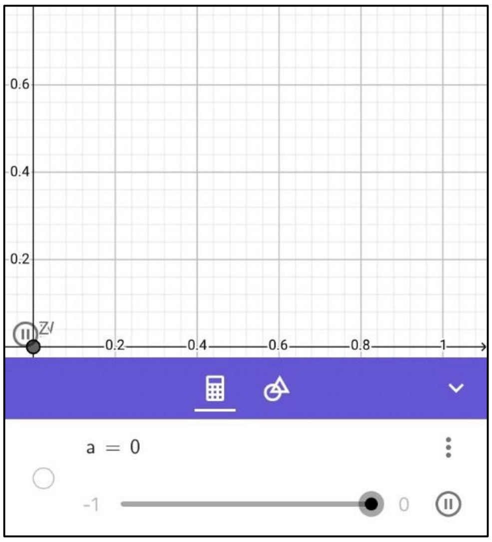
そして$\lim_{n\to\infty} a_n$の場合$\left|\frac{1}{\alpha}\right| > 1$となればよいが$\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{1\pm\sqrt{1+4x}}$より$x>0$のときのみ成立する。

$x>0$のとき$0<|a_n-\alpha|<0$より$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$となる。

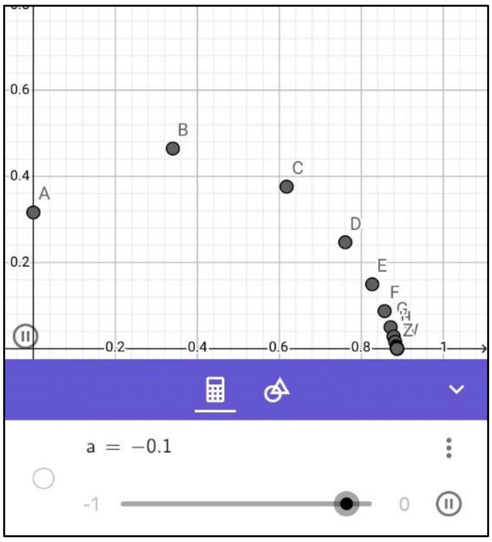
しかし$-\frac{1}{4}<x<0$の範囲では証明不可

③ 座標上での推移

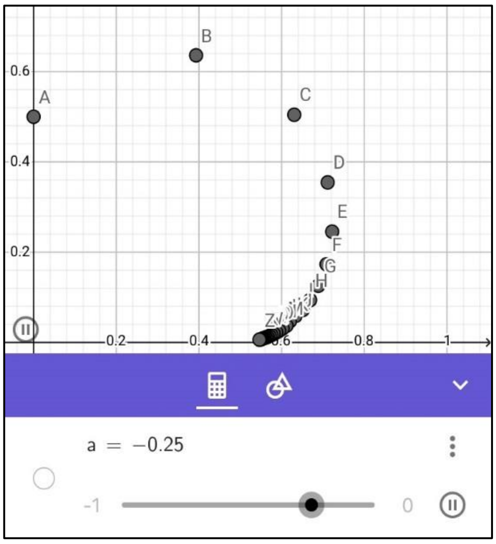
x軸を実軸, y軸を虚軸として$\mathrm{A}(a_1,b_1)B(a_2,b_2)\cdots\cdots Z(a_{26},b_{26})$という点を座標上にプロットし、$x$の値を変化させたときのそれぞれの点の動きを観察した。($\mathrm{a}=x$)



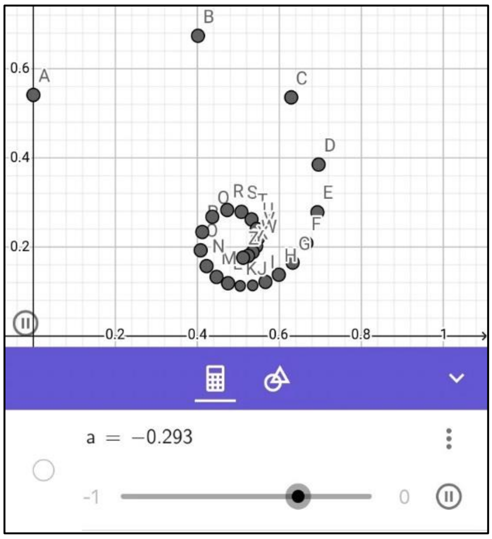
図②$x=0$



図③$x=-0.1$



図④$x = -0.25$



図⑤$x = -0.293$

図②は$x = 0$のときであり点が原点に集中している。

図③, ④では$x = -0.1, x = -0.25$で$-\frac{1}{4} < x < 0$の値なのでZはほぼx軸上に位置している。

図⑤では$-\frac{1}{4} > x$なので虚部が生じている。

４．結果・考察

疑問①に対する解

数式での証明はできなかったものの実際に代入して漸化式で計算した場合とグラフ上に表示したときに虚部が0に収束したことから（＊）の式は実数になると考えられる。

疑問②に対する解

$\sqrt{i}$という数は$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$という２つの数になると定義されているので（＊）の式は２の数になると考えられる。

証明

$\sqrt{i} = a + bi$と置く（a, bは実数）　両辺を２乗すると

$i = a^2 + 2abi - b^2$　となり、実部同士と虚部同士を等式で結び計算すると

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{\sqrt{2}}$　　$a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$となる。

５．今後の展望

漸化式の計算の際にエクセルを用いたので

$$a_{n+1} = \pm\sqrt{\frac{x + a_n \pm \sqrt{(x+a_n)^2 + {b_n}^2}}{2}} \quad b_{n+1} = \pm\sqrt{\frac{-(x + a_n) \pm \sqrt{(x+a_n)^2 + {b_n}^2}}{2}}$$

の±を最初から固定して計算したが各項ごとに変えることでもうひとつの数の存在を数式で証明できるのではないかと思われる。