２つの封筒のパラドックス

数学班：梶原　亜直，林　起輝

１．はじめに

２つの封筒問題とは、

- ２つの封筒があり、一方の封筒には他方の封筒の２倍のお金が入っている。（例えば、片方には１万円、もう一方には２万円入っている。）
- 片方を無作為に選んで中身を見る。

このとき、他方の封筒に変えた方が得か損か、という問題である。

２．パラドックスの内容

選んだ封筒にn円が入っていたとする。このとき、もう一方の封筒に入っている金額は、$2n$円または $\frac{1}{2}n$ 円である。期待値の考え方を用いると、変えたときに得られる金額は、

$$2n\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}n>n$$

となり、<u>nの値によらず</u>変えた方が得ということになる。これは現実と合わず、矛盾する。

３．研究内容

上の計算は、「どの金額も等確率で得られる」という仮定で計算した。より現実的な仮定として、「２つの封筒に入っている合計金額が高い確率」は低いことを要請した。具体的には、「２つの封筒の合計金額が$3n$円である確率を$p(n)$」とし、$p(n)$を用いて期待値を求め、矛盾を解消しようと試みた。選んだ封筒にn円が入っていたとき、他方の封筒に$2n$円入っている確率は、条件付き確率の考え方により、

$$\frac{p(n)}{p(n)+p\left(\frac{1}{2}n\right)}$$

で与えられる。

（例①）$p(n)=\frac{1}{n^2}\times\mathrm{A}$のとき（Aは$\sum_{n=1}^{\infty}p(n)=1$で決まる定数）

$$p(n)=\frac{1}{n^2}\times\mathrm{A}\ ,\quad p\left(\frac{1}{2}n\right)=\frac{4}{n^2}\times\mathrm{A}$$

であるから、自分がn円入っている封筒を選んだとき、他方に$2n$円入っている確率は、

$$\frac{p(n)}{p(n)+p\left(\frac{1}{2}n\right)}=\frac{\frac{1}{n^2}\times\mathrm{A}}{\frac{1}{n^2}\times\mathrm{A}+\frac{4}{n^2}\times\mathrm{A}}=\frac{1}{5}$$

また同様に、自分がn円入っている封筒を選んだとき、他方に $\frac{1}{2}n$ 円入っている確率は、

$$\frac{p\left(\frac{1}{2}n\right)}{p(n)+p\left(\frac{1}{2}n\right)}=\frac{\frac{4}{n^2}\times\mathrm{A}}{\frac{1}{n^2}\times\mathrm{A}+\frac{4}{n^2}\times\mathrm{A}}=\frac{4}{5}$$

これより期待値を求めると

$$2n \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2}n \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}n < n$$

より、必ず元の金額より少なくなるので、封筒を変えない方がよい。

（例②）$p(n) = \frac{1}{n^2+10^8} \times k$　のとき（kは$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = 1$で決まる定数）

$$p\left(\frac{1}{2}n\right) = \frac{1}{\frac{1}{4}n^2 + 10^8} \times k = \frac{4}{n^2 + 4 \times 10^8} \times k$$

であるから、自分がn円入っている封筒を選んだとき、他方に$2n$円入っている確率は、

$$\frac{p(n)}{p(n) + p\left(\frac{1}{2}n\right)} = \frac{n^2 + 4 \times 10^8}{5n^2 + 8 \times 10^8}$$

また同様に、自分がn円入っている封筒を選んだとき、他方に $\frac{1}{2}n$ 円入っている確率は、

$$\frac{p\left(\frac{1}{2}n\right)}{p(n) + p\left(\frac{1}{2}n\right)} = \frac{4n^2 + 4 \times 10^8}{5n^2 + 8 \times 10^8}$$

これより期待値を求めると

$$2n \times \frac{n^2 + 4 \times 10^8}{5n^2 + 8 \times 10^8} + \frac{1}{2}n \times \frac{4n^2 + 4 \times 10^8}{5n^2 + 8 \times 10^8} = \frac{4n^2 + 10^9}{5n^2 + 8 \times 10^8}n$$

となり、この値をw とおくと

$0 < n < 10^4\sqrt{2}$　のとき　w > nより封筒を変えた方が得である。

$n = 10^4\sqrt{2}$　　のとき　w ＝nより封筒を変えても同じである。

$10^4\sqrt{2} < n$　　のとき　w <nより封筒を変えない方が得である。

４．考察

$p(n)$をいろいろ変えることによって、現実的な仮定をすることにより、矛盾を解消することができたと考えられるが、期待値の議論がどこまで適用できるのかということについて、もう少し考察を深めなければならない。