４　シュタイナー環のできる条件

数学班：米花　琢真

１．はじめに

「日本の幾何−何題解けますか？」で、
シュタイナー環（図１参照）について知り、
どのような条件でできるのか調べた。

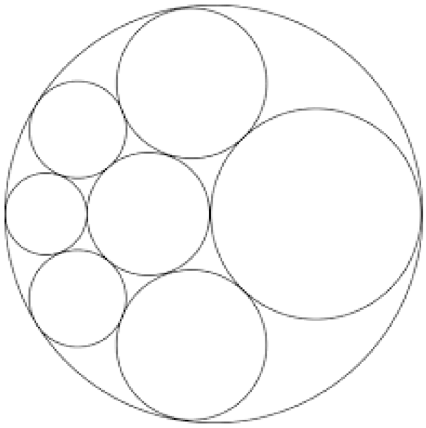

図１　**シュタイナー環**
適当に円をとっても
できない

２．研究方法

２つの大小異なる円をそれぞれ「大円」、「小円」と呼び、
大円、小円に内接する多くの円をまとめて「円環」と呼ぶ。
シュタイナー環のできる条件を大円半径Rと小円半径rと
大円と小円の中心間距離lの比で導出する。
以下、円環の個数をn個、$\alpha=\sin\frac{\pi}{n}$　とする。

① 大円と小円が同心円である場合、簡単な計算により、

$$R:r=(1+\alpha):(1-\alpha)\ \cdots\ (*)$$

となることがわかる。

② 大円と小円が同心円でない場合も、「反転法」とよばれる方法を用いることで、大円と小円が同心円である場合に帰着させることができるから、
（＊）を利用して、
（非同心円の大円半径）R'：（非同心円の小円半径）r'：lを導出する。

３．反転法について

反転円Oを任意に定めて、反転円の中心を
軸にして図形を移すことを反転という。
反転円の半径をkとすると、点Pは、
$OP\times OP'=k^2$を満たす点P'に反転される。
（図２参照）

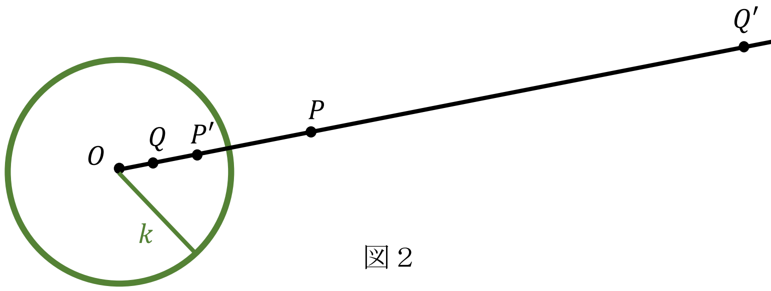

図２

また、反転法の性質として、

ⅰ，反転円の中心を通らない円は円に反転され、
反転円の中心を通る円は直線に反転される。

ⅱ，反転の前後で円や直線の接する状態は変わらない。

∴ⅱより、大円と小円が同心円のシュタイナー環を
大円と小円が同心円でないシュタイナー環に反転させることができる。

３．研究内容

① 大円と小円が同心円でない場合、反転前の同心円と反転円の中心間距離をdとし、（＊）より$R = 1 + \alpha$、$r = 1 - \alpha$とする。

② (同心円の大円半径)$R \rightarrow$ (非同心円の大円半径)R'、
(同心円の小円半径)$r \rightarrow$ (非同心円の小円半径)r'に反転されるようなdは
反転法の性質ｉより、$d > 1 + \alpha$と定まる。

③ 反転円Oの中心を原点として、同心円の中心方向をx軸とする。（図３参照）

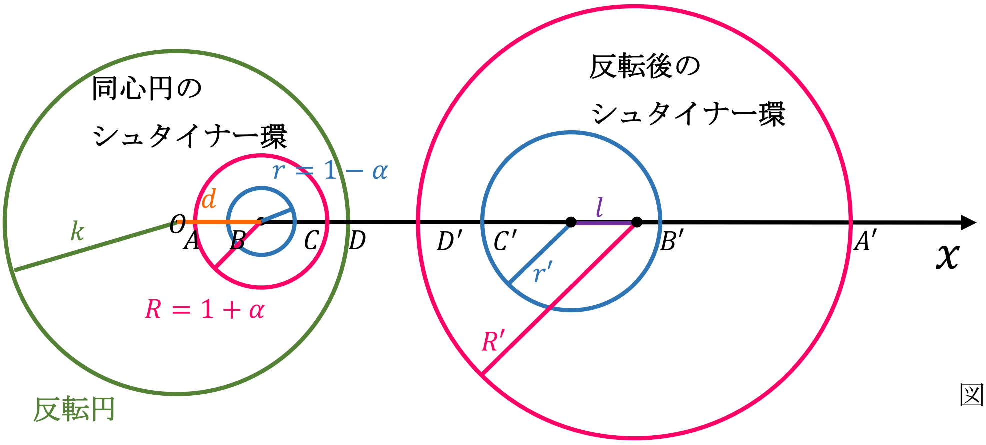

図３

④ 同心円のシュタイナー環とx軸の交点の座標をA, B, C, Dと定めると、
（図３参照）
$A{:}\{d-(1+\alpha)\}, B{:}\{d-(1-\alpha)\}, C{:}\{d+(1-\alpha)\}, D{:}\{d+(1+\alpha)\}$と表されるので、

反転後の座標A', B', C', D'は反転法の式　$OP \times OP' = k^2$　$\therefore OP' = \frac{k^2}{OP}$より、

$A'{:}\left\{\frac{k^2}{d-(1+\alpha)}\right\}, B'{:}\left\{\frac{k^2}{d-(1-\alpha)}\right\}, C'{:}\left\{\frac{k^2}{d+(1-\alpha)}\right\}, D'{:}\left\{\frac{k^2}{d+(1+\alpha)}\right\}$となる。

⑤ $R' : r' : l$はA', B', C', D'を用いると、
$\frac{1}{2}(\text{線分}A'D') : \frac{1}{2}(\text{線分}B'C') : \frac{1}{2}\{(\text{線分}A'D'\text{の中点}) - (\text{線分}B'C'\text{の中点})\}$と
表されるので、A', B', C', D'の座標を用いて、$R' : r' : l$を導出する。

⑥ R', r', lは、

$$R' = \frac{1}{2}\left\{\frac{k^2}{d-(1+\alpha)} - \frac{k^2}{d+(1+\alpha)}\right\} = \frac{(1+\alpha)}{d^2-(1+\alpha)^2}k^2,$$

$$r' = \frac{1}{2}\left\{\frac{k^2}{d-(1-\alpha)} - \frac{k^2}{d+(1-\alpha)}\right\} = \frac{(1-\alpha)}{d^2-(1-\alpha)^2}k^2,$$

$$l = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{k^2}{d-(1+\alpha)} + \frac{k^2}{d+(1+\alpha)}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{k^2}{d-(1-\alpha)} + \frac{k^2}{d+(1-\alpha)}\right\}\right] = \frac{4\alpha d}{\{d^2-(1-\alpha)^2\}\{d^2-(1+\alpha)^2\}}k^2$$と

なるので、

$$R':r':l=\frac{(1+\alpha)}{d^2-(1+\alpha)^2}k^2:\frac{(1-\alpha)}{d^2-(1-\alpha)^2}k^2:\frac{4\alpha d}{\{d^2-(1-\alpha)^2\}\{d^2-(1+\alpha)^2\}}k^2$$

$$=\left\{d^2-\left(1-\alpha\right)^2\right\}\left(1+\alpha\right):\left\{d^2-\left(1+\alpha\right)^2\right\}\left(1-\alpha\right):4\alpha d$$

４．結果

大円と小円が同心円でない場合、反転前の同心円と反転円の中心間距離をdとすると（ただし、反転法の条件より$d>1+\alpha$）

$$R':r':l=\left\{d^2-\left(1-\alpha\right)^2\right\}\left(1+\alpha\right):\left\{d^2-\left(1+\alpha\right)^2\right\}\left(1-\alpha\right):4\alpha d$$

を満たすとき、シュタイナー環ができることがわかった。

５．考察

反転法を用いると大円と小円が同心円でない場合も、シュタイナー環のできる条件を導出できた。しかし、反転法により条件$d>1+\alpha$が必要となったため、dの範囲が実数全体になるなどして、条件を減らしたい。また、円環については、今回触れなかったので、一定の条件下での円環の関係を調べたい。

５．参考文献

森北出版株式会社　「日本の幾何−何題解けますか？」