５ベルトランのパラドックス

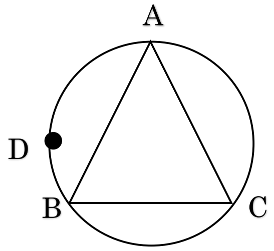
数学班：松岡竜平　山本幸永

１．はじめに

円に内接する正三角形を考える。無作為に１本弦を引いたとき、正三角形の１辺より長くなる確率を求めると、解は３通り出てくる。１つの事象の確率を求めているのに３通りの解が出ることはおかしい。これを、ベルトランのパラドックスという。私たちは、この原因について研究を進めた。

２．３つの解

[図 1]



（解法１）

① 正三角形の１つの頂点を結ぶ。

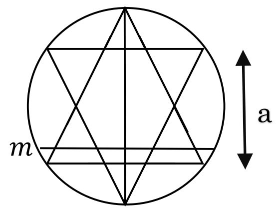
② 円周上の１点を無作為に選ぶ。(ｉの点以外)

D が弧 BC 間にあるとき、AD≧三角形の一辺

よって $\frac{60°}{180°}=\frac{1}{3}$

（解法２）

[図 2]



① 正三角形を 180°回転させる。

三角形の頂点を結んだ円の直径に直交する任意の直線 mをとる。

m上に中点がある弦を引くとき、弦の中点が「a」の範囲にあるときのみ条件を満たす。

半径を１とすると求める確率は$\frac{1}{2}$

（解法３）

① 正三角形を無限回回転させる。すると、[図 2]における六角形の部分が円となる。

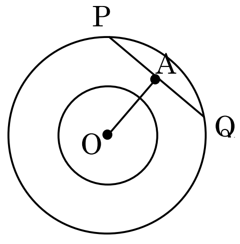
このとき、小円を円α、大円を円βとし、２円は同心円である。

円αの内部に点 A をとる。

② 中点が点 A、OA⊥PQ となる、弦 PQ を引く。

このとき、点 A が円αの中にあるとき条件を満たす。

[図 3]



半径を１とすると求める確率は、$\frac{円\alpha の面積}{円\beta の面積}=\frac{\frac{1}{4}\pi}{\pi}=\frac{1}{4}$

３．研究方法

確率が異なるのは同様に確からしいものが違うからである。

〈解法①の前提条件〉円周上の２点が同様に確からしい

〈解法②の前提条件〉直径上の各点が同様に確からしい

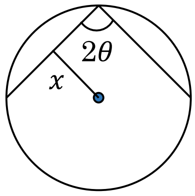
〈解法③の前提条件〉円の内部の各点が同様に確からしい

これら３つの条件は、同時に成り立たない。これがパラドックスの原因である。そこで①の条件を仮定し、解法②の確率分布がどのようになるのか数式を使って計算することを試みた。

円の半径を１とする。中心から弦までの距離をdと定め、$0\leqq d\leqq x$とする。ただし、今、円の半

径は 1 だから 0＜x＜1 である。また、円周角を 2θとする。確率は$\frac{2\theta}{\pi}$で求められる。

[図 4]



$$\sin\theta = x$$
$$\theta = \sin^{-1} x$$
$$2\theta = 2\sin^{-1} x$$
$$\frac{2\theta}{\pi} = \frac{2\sin^{-1}\theta}{\pi}$$

よって、求める確率$f(x)$は、次のようになる。

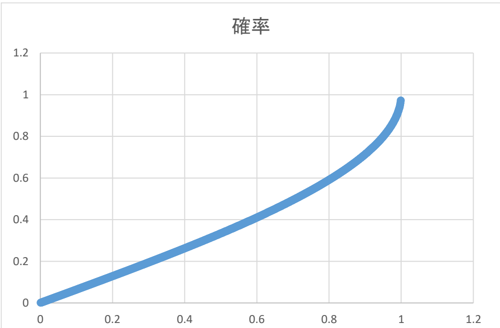
$$f(x) = \frac{2\sin^{-1} x}{\pi}$$

また、これを微分して確率分布$f'(x)$は次のようになる。

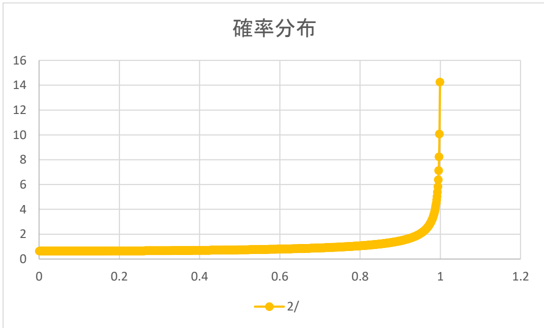
$$f'(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

$f(x)$と$f'(x)$をグラフにすると、以下のようになった。（横軸：x）

$f(x)$のグラフ



$f'(x)$のグラフ



上図より確率分布はxの値によって変動する。

もし、〈解法①の前提条件〉と〈解法②の前提条件〉が同時に成り立つ場合、この確率分布のグラフは横軸（x軸）と平行になるはずである。よって、〈解法①の前提条件〉と〈解法②の前提条件〉が同時に成り立たないことが分かる。このことから、パラドックスの原因が同様に確からしいものの違いであることが証明された。

４．考察

パラドックスは存在しないということが分かった。同様に確からしいものを先に定めないと今回の問題のように解が複数個出てきてしまう。逆に同様に確からしいものを先に定めると解は一つに定まる。