1 解答 $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

2 解答 $x<-5,\ 4<x$

3 解答 (1) $a<-6$　(2) $-6<a<-2$　(3) $3\leqq a<7$

4 解答 (ア) $2a+1$　(イ) $-a^2+2a+1$　(ウ) $-4a+10$

5 解答 順に，$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$\mathrm{AC}=3$，$\dfrac{5\sqrt{11}}{4}$

6 解答 (1) (ア) 630　(イ) 180　(ウ) 90　(2) (エ) 30　(3) (オ) 6

7 解答 135 通り

8 解答 14

9 解答 $\dfrac{(アイ)}{(ウエ)}$ $\dfrac{28}{33}$　$\dfrac{(オ)}{(カキ)}$ $\dfrac{5}{33}$　$\dfrac{(ク)}{(ケコ)}$ $\dfrac{5}{11}$

10 解答 (ア) 9　(イ) 14

11 解答 11 : 7

12 解答 (1) $\dfrac{3}{10}$　(2) $\dfrac{3}{13}$

13 解答 (ア) $(-2,\ 52)$　(イ) -4

14 解答 放物線 $y=-x^2+2x-5$

15 解答 (ア) $-\dfrac{1}{6}$　(イ) $\dfrac{1}{2}$

16 解答 (ア) 11　(イ) 6　(ウ) 13　(エ) 5　(オ) 6　(カ) -3

17 解答 (ア) 2　(イ) 1　(ウ) 1　(エ) 1　(オ) 6　$\dfrac{(カ)}{(キ)}$ $\dfrac{5}{6}$

$\dfrac{(ク)}{(ケ)}$ $\dfrac{3}{2}$　(コ) ⓪　$\dfrac{(サ)}{(シ)}$ $\dfrac{1}{4}$　$\dfrac{(ス)}{(セ)}$ $\dfrac{9}{8}$　(ソ) ②　(タ) 2

(チ)，(ツ) ⑤，⑨ または ⑨，⑤　$\dfrac{(テト)}{(ナ)}$ $\dfrac{-9}{8}$　(ニ) ②

18 解答 -1

19 解答 $x=3,\ \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

20 解答 (ア) $-7<x<1$　(イ) 4

21 解答 $-5<k<27$

22 解答 $\dfrac{4}{3}$

23 解答 $t=1$ のとき最小値 $\dfrac{4}{3}$

24 解答 (ア) 1　(イ) 3　(ウ) 3280　(エ) 28　(オ) -7

25 解答 (1) (ア) 1　(イ) 2　(2) (ウ) 1　(エ) 2　(3) (オ) 3
(カ) 4

26 解答 (ア) $b_n+\dfrac{1}{2}$　(イ) $\dfrac{2}{n+1}$

27 解答 (ア) $-\dfrac{11}{2}$　(イ) $-\dfrac{11}{24}$　(ウ) $\dfrac{11}{32}$

28 解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\dfrac{1}{n}-1\right)\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$　(2) $n=4$　(3) AR : RC=7 : 3

29 解答 (ア) $\dfrac{2}{3}$　(イ) $\dfrac{1}{3}$　(ウ) $-\dfrac{2}{3}$　(エ) $\dfrac{13}{3}$

30 解答 順に $\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{7}{6}$

$\boxed{1}$ $x^2-4x-3<0$ を解くと　$2-\sqrt{7}<x<2+\sqrt{7}$

$2<\sqrt{7}<3$ であるから，$-3<-\sqrt{7}<-2$ であり

$$-1<2-\sqrt{7}<0,\ 4<2+\sqrt{7}<5$$

よって，求める整数 x は　$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

別解　$x^2-4x-3<0$ から　$(x-2)^2<7$　……①

$(x-2)^2$ は $x=2$ のとき最小になることに注目して，① を満たす整数 x を求めると

$$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$\boxed{2}$ $x^2-7>3|x-1|$　……①

[1]　$x<1$ のとき，① は　$x^2-7>-3(x-1)$

よって　$x^2+3x-10>0$　すなわち　$(x+5)(x-2)>0$

ゆえに　$x<-5,\ 2<x$

$x<1$ との共通範囲は　$x<-5$

[2]　$1\leqq x$ のとき，① は　$x^2-7>3(x-1)$

よって　$x^2-3x-4>0$　すなわち　$(x+1)(x-4)>0$

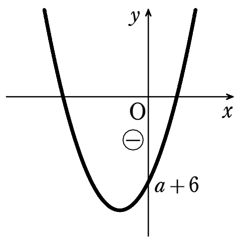
ゆえに　$x<-1,\ 4<x$

$1\leqq x$ との共通範囲は　$4<x$

したがって，解は　$x<-5,\ 4<x$

$\boxed{3}$ $f(x)=x^2-2ax+a+6$ とする。

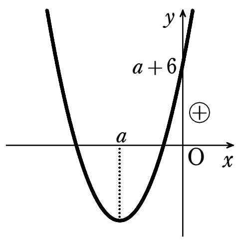
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$ である。



(1)　正の解と負の解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と負の部分で交わることであるから

$$f(0)=a+6<0$$

よって　$a<-6$



(2)　異なる 2 つの負の解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わることである。

よって，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

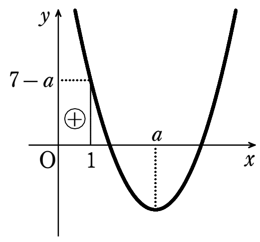
$$\begin{cases}\dfrac{D}{4}=(-a)^2-(a+6)>0 & \cdots\cdots ①\\ \text{軸について}\quad a<0 & \cdots\cdots ②\\ f(0)=a+6>0 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

① から　$(a+2)(a-3)>0$

よって　$a<-2,\ 3<a$　……④

③ から　$a>-6$　……⑤

②，④，⑤ の共通範囲を求めて　$-6<a<-2$



(3)　すべての解が 1 より大きいための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $x>1$ の部分と 2 つの共有点をもつか，または接することである。

したがって

$$\begin{cases}\dfrac{D}{4}=(-a)^2-(a+6)\geqq 0 & \cdots\cdots ①\\ \text{軸について}\quad a>1 & \cdots\cdots ②\\ f(1)=7-a>0 & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

① から　$(a+2)(a-3)\geqq 0$

よって　$a\leqq -2,\ 3\leqq a$　……④

③ から　$a<7$　……⑤

②，④，⑤ の共通範囲を求めて　$3\leqq a<7$

$\boxed{4}$ $y=x^2-2ax+2a+1=(x^2-2ax+a^2)-a^2+2a+1=(x-a)^2-a^2+2a+1$

よって，この関数のグラフは，軸が直線 $x=a$ で，下に凸な放物線である。

(1)　$a<0$ のとき　$0\leqq x\leqq 3$ におけるグラフは [図 1] の実線部分のようになる。

したがって，$x=0$ のとき最小となり，その最小値 m は　$m={}^{ア}2a+1$

(2)　$0\leqq a<3$ のとき　$0\leqq x\leqq 3$ におけるグラフは [図 2] の実線部分のようになる。

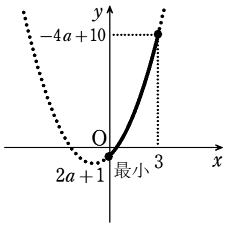
したがって，$x=a$ のとき最小となり，その最小値 m は

$m={}^{イ}-a^2+2a+1$

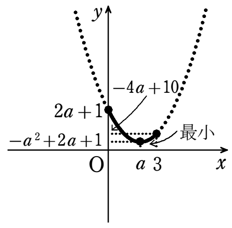
(3)　$3\leqq a$ のとき　$0\leqq x\leqq 3$ におけるグラフは [図 3] の実線部分のようになる。

したがって，$x=3$ のとき最小となり，その最小値 m は　$m={}^{ウ}-4a+10$

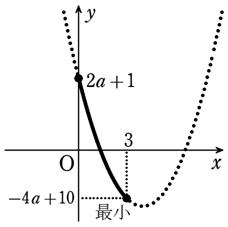
[図 1]



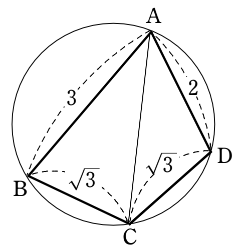
[図 2]



[図 3]



$\boxed{5}$ △ABC に余弦定理を適用して



$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}$

$=3^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cos\angle\mathrm{ABC}$

$=12-6\sqrt{3}\cos\angle\mathrm{ABC}$　……①

また，△CDA に余弦定理を適用して

$\mathrm{AC}^2=\mathrm{CD}^2+\mathrm{DA}^2-2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}\cos\angle\mathrm{CDA}$

$=(\sqrt{3})^2+2^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cos(180^\circ-\angle\mathrm{ABC})$

$=7+4\sqrt{3}\cos\angle\mathrm{ABC}$　……②

①，② から　$12-6\sqrt{3}\cos\angle\mathrm{ABC}=7+4\sqrt{3}\cos\angle\mathrm{ABC}$

よって　$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

これを ① に代入して　$\mathrm{AC}^2=12-6\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6}=9$　$\mathrm{AC}>0$ であるから　$\mathrm{AC}=3$

更に，$\sin\angle\mathrm{ABC}>0$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{33}}{6}$$

また　$\sin\angle\mathrm{CDA}=\sin(180^\circ-\angle\mathrm{ABC})=\sin\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$

よって　(四角形 ABCD の面積)

$=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{CDA}$

$=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ABC}+\dfrac{1}{2}\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}\sin\angle\mathrm{CDA}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{33}}{6}+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{33}}{6}=\dfrac{5\sqrt{11}}{4}$

$\boxed{6}$ (1)　(ア)　A，B，C 各 2 個，D 1 個の順列であるから　$\dfrac{7!}{2!2!2!}=630$ (通り)

(イ)　D の並べ方は　2 通り

そのおのおのに対して残り 6 文字の並べ方は　$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$ (通り)

よって，求める並べ方は　$2\times 90=180$ (通り)

(ウ)　A，B，C 各 2 個の順列を作り，それらの間の 5 か所の左から 3 番目に D を入れればよい。

よって，求める並べ方は　$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$ (通り)

(2)　(エ)　ADA をまとめて X で表すと，この順列は B，C 各 2 個，X 1 個の順列であるから　$\dfrac{5!}{2!2!}=30$ (通り)

(3)　(オ)　D を中心におき，その左半分に A，B，C 各 1 個を並べる順列の数に等しいから　$3!=6$ (通り)

$\boxed{7}$ 3 つの目の積が 4 の倍数にならないのは，

[1]　3 つとも奇数のとき　[2]　2 つが奇数で他の 1 つが 2 または 6 のとき

のいずれかである。

[1] のときは $3^3=27$ (通り)

[2] のときは ${}_3\mathrm{C}_2\times 3^2\times 2=54$ (通り)

よって，求める場合の数は $6^3-(27+54)=135$ (通り)

$\boxed{8}$ 3 つのかごに入れるボールの個数を $a,\ b,\ c$ $(0\leqq a\leqq b\leqq c)$ とする。

このとき，$a+b+c=10$ を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組の個数が求めるボールの入れ方と等しい。

a の値によって場合分けをする。

$a=0$ のとき　$b+c=10,\ 0\leqq b\leqq c$

これを満たす $(b,\ c)$ の組は

$(b,\ c)=(0,\ 10),\ (1,\ 9),\ (2,\ 8),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6),\ (5,\ 5)$

の 6 組である。

同様にして，$a=1$ のときは 4 組，$a=2$ のときは 3 組，$a=3$ のときは 1 組であり，$a\geqq 4$ のときは 0 組である。

よって，ボールの入れ方は　$6+4+3+1=14$ (通り)

$\boxed{9}$ (1)　A さんと B さんが取り出した 2 個の球のなかに，赤球も青球も含まれないのは，2 人とも白球を取り出したときであるから，その確率は $\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{4}{11}=\dfrac{5}{33}$

よって，求める確率は　$1-\dfrac{5}{33}=\dfrac{{}^{アイ}28}{{}_{ウエ}33}$

(2)　A さんが赤球を取り出す事象を A，B さんが白球を取り出す事象を B とすると，A さんが赤球を取り出し，かつ B さんが白球を取り出す確率は $P(A\cap B)$ である。

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$ であるから　$P(A\cap B)=\dfrac{4}{12}\cdot\dfrac{5}{11}=\dfrac{{}^{オ}5}{{}_{カキ}33}$

A さんが取り出した球が赤球であったとき，B さんが取り出した球が白球である条件付き確率は $P_A(B)$ であるから　$P_A(B)=\dfrac{{}^{ク}5}{{}_{ケコ}11}$

$\boxed{10}$ 赤球が x 個，白球が y 個とする。

[1] から　$y<x<2y$　……①

[2] から　$3x+2y=60$　……②

② から　$y=30-\dfrac{3}{2}x$　……③

① に代入すると　$30-\dfrac{3}{2}x<x<60-3x$　　よって　$12<x<15$

$x=13$ のとき，③ から　$y=\dfrac{21}{2}$　　このとき，y が整数でないから不適。

$x=14$ のとき，③ から　$y=9$　　このとき，y が整数であるから適する。

よって　（ア）9　（イ）14

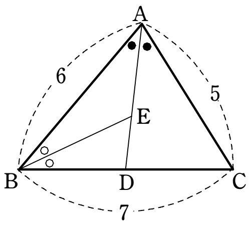
$\boxed{11}$ AD は ∠A の二等分線であるから

BD : DC＝AB : AC＝6 : 5

BC＝7 であるから　$\mathrm{BD}=7\times\dfrac{6}{6+5}=\dfrac{42}{11}$

BE は ∠B の二等分線であるから

$\mathrm{AE}:\mathrm{ED}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=6:\dfrac{42}{11}=11:7$



$\boxed{12}$ (1)　△ABP と直線 RC にメネラウスの定理を

用いると　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CP}}\cdot\dfrac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$　……①

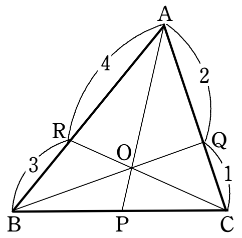
また，チェバの定理により　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$

が成り立つから　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}=1$

ゆえに　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{3}{2}$

よって，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CP}}=\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{4}{3}$ と ① から　$\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}}\cdot\dfrac{4}{3}=1$

ゆえに　$\dfrac{\mathrm{PO}}{\mathrm{OA}}=\dfrac{3}{10}$



(2)　$\dfrac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{AP}}$ であり，(1) から　$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{13}$

よって　$\dfrac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\dfrac{3}{13}$

$\boxed{13}$ 方程式の係数は実数であるから，$3-2i$ と共役な複素数 $3+2i$ も，この方程式の解となる。3 つ目の解を α とすると，3 次方程式の解と係数の関係から

$(3-2i)+(3+2i)+\alpha=-a$，

$(3-2i)(3+2i)+(3+2i)\alpha+\alpha(3-2i)=-11$，

$(3-2i)(3+2i)\alpha=-b$

ゆえに　$6+\alpha=-a$，$6\alpha=-24$，$13\alpha=-b$

第 2 式から　$\alpha=-4$

これと第 1 式，第 3 式から

$2=-a$，$-52=-b$

よって，$(a,\ b)={}^{\text{ア}}(-2,\ 52)$ であり，この 3 次方程式の実数解は ${}^{\text{イ}}-4$ である。

$\boxed{14}$ $x^2-(k+5)x+k=\left(x-\dfrac{k+5}{2}\right)^2+k-\left(\dfrac{k+5}{2}\right)^2=\left(x-\dfrac{k+5}{2}\right)^2-\dfrac{(k+5)^2-4k}{4}$

と変形できるから，放物線の方程式は $y=\left(x-\dfrac{k+5}{2}\right)^2-\dfrac{k^2+6k+25}{4}$ と表される。

よって，P$(x,\ y)$ とおくと　$x=\dfrac{k+5}{2}$ ……①，$y=-\dfrac{k^2+6k+25}{4}$ ……②

① から　$k=2x-5$

② に代入して k を消去すると　$y=-\dfrac{(2x-5)^2+6(2x-5)+25}{4}$

すなわち　$y=-x^2+2x-5$

逆も成り立つから，求める軌跡は，放物線 $y=-x^2+2x-5$

$\boxed{15}$ 与えられた不等式から　$2(1-\sin^2 x)+\sin x-1>0$

よって　$2\sin^2 x-\sin x-1<0$　　すなわち　$(2\sin x+1)(\sin x-1)<0$

したがって　$-\dfrac{1}{2}<\sin x<1$

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ から　${}^{\text{ア}}-\dfrac{1}{6}\pi<x<{}^{\text{イ}}\dfrac{1}{2}\pi$

$\boxed{16}$　$f(x)=-4\sin x+4\sqrt{3}\cos x+5=8\sin\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)+5$

$0\leqq x<2\pi$ のとき　$\dfrac{2}{3}\pi\leqq x+\dfrac{2}{3}\pi<\dfrac{8}{3}\pi$

よって，$x+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{5}{2}\pi$ すなわち $x=\dfrac{{}^{\text{ア}}11}{{}^{\text{イ}}6}\pi$ のとき最大値 ${}^{\text{ウ}}13$ をとり，

$x+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$ すなわち $x=\dfrac{{}^{\text{エ}}5}{{}^{\text{オ}}6}\pi$ のとき最小値 ${}^{\text{カ}}-3$

をとる。

$\boxed{17}$ (1)　$\sin x-\cos 2x=\sin x-(1-2\sin^2 x)$

$={}^{\text{ア}}\,2\sin^2 x+\sin x-{}^{\text{イ}}\,1$　……①

$=(2\sin x-{}^{\text{ウ}}\,1)(\sin x+{}^{\text{エ}}\,1)$

$\sin x-\cos 2x=0$ とすると　$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

よって　$\sin x=\dfrac{1}{2}$，-1

$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で解くと　$x=\dfrac{\pi}{{}^{\text{オ}}6}$，$\dfrac{{}^{\text{カ}}5}{{}^{\text{キ}}6}\pi$，$\dfrac{{}^{\text{ク}}3}{{}^{\text{ケ}}2}\pi$

また，$\sin x-\cos 2x>0$ とすると　$(2\sin x-1)(\sin x+1)>0$

$\sin x+1\geqq 0$ であるから　$2\sin x-1>0$ かつ $\sin x+1\fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$

ゆえに　$\sin x>\dfrac{1}{2}$ かつ $\sin x\neq -1$　　すなわち　$\sin x>\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ であるから　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi$　（${}^{\text{コ}}$⓵）

(2)　① から

$\sin x-\cos 2x=2\left(\sin x+\dfrac{{}^{\text{サ}}1}{{}^{\text{シ}}4}\right)^2-\dfrac{{}^{\text{ス}}9}{{}^{\text{セ}}8}$

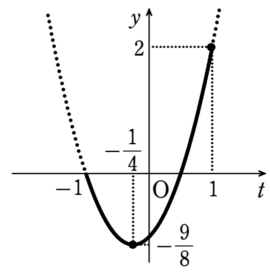
$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq 2\pi$ であるから

$-1\leqq t\leqq 1$

また　$y=2\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$

よって，y は $t=1$ において最大値 ${}^{\text{タ}}2$ をとり，

$t=-\dfrac{1}{4}$ において最小値 $\dfrac{{}^{\text{テト}}-9}{{}^{\text{ナ}}8}$ をとる。



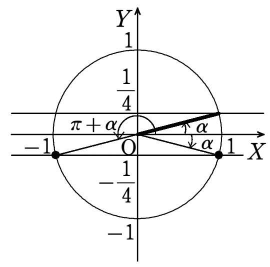
ここで　$t=1$ のとき　$x=\dfrac{\pi}{2}$　（${}^{\text{ソ}}$⓶）

$t=-\dfrac{1}{4}$ のとき

右の図から $x=\pi+\alpha$，$2\pi-\alpha$

（${}^{\text{チ}}$⓹，${}^{\text{ツ}}$⓽ または ${}^{\text{チ}}$⓽，${}^{\text{ツ}}$⓹）

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$



(3)　(1)，(2) より，$y>0$ となる x の範囲は $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi$

であり，y は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値をとるから，⓪，⓵，⓶ のいずれかである。

さらに，y は $x=\pi+\alpha$，$2\pi-\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ で最小値をとるから，グラフの概形として適切なものは　${}^{\text{ニ}}$⓶

$\boxed{18}$ 方程式から　$3\cdot(3^x)^2+5\cdot 3^x-2=0$

よって　$(3^x+2)(3\cdot 3^x-1)=0$

$3^x>0$ より $3^x+2>0$ であるから　$3\cdot 3^x-1=0$

ゆえに　$3^x=\dfrac{1}{3}$　　すなわち　$3^x=3^{-1}$

よって　$x=-1$

$\boxed{19}$ 真数は正であるから　$x>0$ かつ $4-x>0$

ゆえに　$0<x<4$　……①

方程式から　$\log_3 x+\dfrac{\log_3(4-x)}{\log_3 9}=1$

$2\log_3 x+\log_3(4-x)=2$

$\log_3 x^2+\log_3(4-x)=2$

$\log_3 x^2(4-x)=2$

よって　$x^2(4-x)=3^2$

整理して　$x^3-4x^2+9=0$

ゆえに　$(x-3)(x^2-x-3)=0$

よって　$x=3$，$\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

① を満たすものが解であるから　$x=3$，$\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\boxed{20}$ 真数条件から $x+7>0,\ 1-x>0$　したがって定義域は $-7<x<1$

$y=\log_2(x+7)(1-x)=\log_2\{16-(x+3)^2\}$

ゆえに　$-7<x<1$ より $x=-3$ のとき y の最大値は $\log_2 16=4$

$\boxed{21}$ $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$ とおく。

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

よって，増減表は次のようになる。

x	…	-1	…	3	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ゆえに，求める条件は　$f(-1)=k+5>0$　かつ　$f(3)=k-27<0$

したがって　$-5<k<27$

22 $y'=4x+3$

点Pにおける接線の方程式は

$y-1=-(x+1)$　　すなわち　　$y=-x$

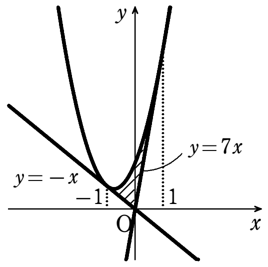
点Qにおける接線の方程式は

$y-7=7(x-1)$　　すなわち　　$y=7x$

2つの接線の交点の x 座標は，

$-x=7x$ を解いて　　$x=0$

右の図から，求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^{0}\{(2x^2+3x+2)-(-x)\}dx+\int_{0}^{1}\{(2x^2+3x+2)-7x\}dx$$

$$=2\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)dx+2\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)dx$$

$$=2\left(\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_{0}^{1}\right)=\frac{4}{3}$$

23 $y'=4x$ であるから，点Pにおける接線の方程式は　$y=4t(x-t)+2t^2+1$

ゆえに　$y=4tx-2t^2+1$

よって　$S=\int_{0}^{2}\{2x^2+1-(4tx-2t^2+1)\}dx=\left[\frac{2}{3}x^3-2tx^2+2t^2x\right]_{0}^{2}$

$$=4t^2-8t+\frac{16}{3}=4(t-1)^2+\frac{4}{3}\quad(0\leqq t\leqq 2)$$

ゆえに，$t=1$ のとき最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

24 (1)　この数列の初項を a，公比を r とする。

初項から第3項までの和が13であるから　　$a(1+r+r^2)=13$

a と r はともに正の整数であり，$1+r+r^2\geqq 3$ であるから

$a=1,\ 1+r+r^2=13$

$1+r+r^2=13$ から　　$r^2+r-12=0$　すなわち　$(r+4)(r-3)=0$

r は正の整数であるから　　$r=3$

よって，初項は ${}^{ア}1$，公比は ${}^{イ}3$ である。

(2)　初項から第8項までの和は　　$\frac{1\cdot(3^8-1)}{3-1}=\frac{6561-1}{2}={}^{ウ}3280$

(3)　$p=1\cdot3\cdot3^2\cdot\cdots\cdots\cdot3^7=3^{1+2+\cdots\cdots+7}=3^{28}$

よって　　$\log_3 p=\log_3 3^{28}={}^{エ}28$

$$\log_{\frac{1}{9}}\sqrt{p}=\log_{\frac{1}{9}}3^{14}=\frac{\log_3 3^{14}}{\log_3 3^{-2}}=\frac{14}{-2}={}^{オ}-7$$

25 (1)　$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=n^2+{}^{イ}2n$　　((ア) は 1)

(2)　$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{n}{{}^{エ}2n+1}\quad((ウ)は 1)$$

(3)　$S=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k2^{k-1}$ とする。

$(-1)^k2^{k-1}=-1\cdot(-2)^{k-1}$ であるから，S は初項 -1，公比 -2 の等比数列の第1項から第 $2n$ 項までの和であるから

$$S=\frac{-1\cdot\{1-(-2)^{2n}\}}{1-(-2)}=\frac{1}{3}\{(-2)^{2n}-1\}$$

ここで，$(-2)^{2n}=\{(-2)^2\}^n=4^n$ であるから　　$S=\frac{1}{{}^{オ}3}({}^{カ}4^n-1)$

26 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$　……① とする。

$a_1=1$ と ① から，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ である。

① の両辺の逆数をとると　　$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{2a_n}$

よって　　$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$

ゆえに　　$b_{n+1}={}^{ア}b_n+\frac{1}{2}$

数列 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{1}{a_1}=1$，公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であるから

$$b_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$$

よって　　$a_n=\frac{1}{b_n}={}^{イ}\frac{2}{n+1}$

27 (ア)　$|\vec{a}-\vec{b}|=6$ の両辺を平方して　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=36$

$|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$ を代入して　　$9-2\vec{a}\cdot\vec{b}+16=36$

よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}={}^{ア}-\frac{11}{2}$

(イ)　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-\frac{11}{2}}{3\cdot4}={}^{イ}-\frac{11}{24}$

(ウ)　$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ が垂直になるための条件は　$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=0$

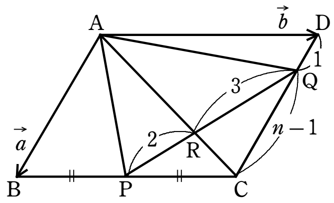
よって　　$\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

すなわち　　$-\frac{11}{2}+16t=0$　　したがって　　$t={}^{ウ}\frac{11}{32}$

28 (1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$

$$=\frac{(n-1)\vec{b}+1\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{1+(n-1)}-\frac{\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-1\right)\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$



(2)　条件から

$$\overrightarrow{AR}=\frac{3\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AQ}}{5}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{\vec{a}+n\vec{b}}{n}$$

$$=\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5n}\right)\vec{a}+\left(\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\right)\vec{b}$$

また，Rは AC 上にあるから，$\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AC}=k(\vec{a}+\vec{b})$ と表される.

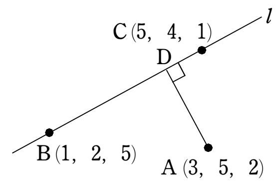
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$（$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立）であるから　$\frac{3}{5}+\frac{2}{5n}=k$，　$\frac{7}{10}=k$

よって，$\frac{2}{5n}=\frac{1}{10}$ から　$n=4$　　これは $n>1$ を満たす。

(3)　(2) より　$\overrightarrow{AR}=\frac{7}{10}\overrightarrow{AC}$ であるから　AR : RC=7 : 3

29 $\overrightarrow{BC}=(4,\ 2,\ -4)$ から

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}=6$



ゆえに　$\vec{e}=\left(\frac{4}{6},\ \frac{2}{6},\ -\frac{4}{6}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{BD}=(2t,\ t,\ -2t)$ (t は実数) とおける。

よって　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}$

$=(2t,\ t,\ -2t)-(2,\ 3,\ -3)$

$=(2t-2,\ t-3,\ -2t+3)$

$\overrightarrow{AD}\perp\vec{e}$ であるから

$\overrightarrow{AD}\cdot\vec{e}=\frac{2}{3}(2t-2)+\frac{1}{3}(t-3)-\frac{2}{3}(-2t+3)=0$

ゆえに　$9t-13=0$　　よって　$t=\frac{13}{9}$

ゆえに　$\overrightarrow{BD}=\left(2\times\frac{13}{9},\ \frac{13}{9},\ -2\times\frac{13}{9}\right)$

$=\left(\frac{2}{3}\times\frac{13}{3},\ \frac{1}{3}\times\frac{13}{3},\ -\frac{2}{3}\times\frac{13}{3}\right)$

$=\frac{13}{3}\vec{e}$

したがって　BD$=\frac{13}{3}$

30 $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)$ であるから $|\overrightarrow{AB}|^2=2$，$|\overrightarrow{AC}|^2=5$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$

よって，三角形 ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot5-1}=\frac{3}{2}$$

D から △ABC に下ろした垂線の足を H とすると，

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=(1-s-t,\ s,2t)$ (s,t は実数)と表される。

ゆえに　$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OD}=(-s-t,\ s-2,\ 2t-3)$　また，$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AC}$ から

$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=s+t+s-2=0$，$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC}=s+t+2(2t-3)=0$

ゆえに　$2s+t=2$，$s+5t=6$　　これを解いて　$s=\frac{4}{9}$，$t=\frac{10}{9}$

よって　$\overrightarrow{DH}=\left(-\frac{14}{9},-\frac{14}{9},-\frac{7}{9}\right)$

したがって　DH$=\sqrt{\left(\frac{7}{9}\right)^2(4+4+1)}=\frac{7}{9}\cdot3=\frac{7}{3}$

ゆえに，四面体 ABCD の体積を V とすると　$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{3}=\frac{7}{6}$