1/7 楕円

数学班：池上敦規

１．はじめに

$$\frac{1}{7} = 0.142587\ldots$$

このように 1/7 は 142587 という 6 つの数字が繰り返される循環小数で表される。その並べられた数のうち、隣り合った 2 つの数字を座標として取り出してみる。すると、（1，4)、(4，2)、(2，5)、(5，8)、(8，7)、(7，1）の 6 点が取り出せる。これらの簡単に取り出しただけの 6 点が同一楕円上に存在するのである。この楕円を、1/7 楕円と呼ぶ。なぜこの 6 点が同一楕円上に存在するのだろうか？単なる偶然では無いはずだと考えられる。1/7 楕円を証明することにした。加えて、このような二次曲線（放物線、双曲線、楕円）が他にも存在するのではないか？と考察し実際に存在するのかを確かめることにした。

２．研究準備

まず証明を進めるにあたって以下のことについて、勉強を進めた。

(1) Midy の定理

$$\frac{1}{p} = 0.a_1a_2a_3\ldots a_ka_{k+1}\ldots a_{2k}$$（p：2, 5 以外の素数　k：整数）

循環節(繰り返される数字の列)を前後で 2 分割したときに(この場合、前の数をa_1～a_k, 後ろの数をa_{k+1}～a_{2k}とする)その 2 つの数の和は必ず$999\ldots999$となる。

$$a_1a_2a_3\ldots a_k + a_{k+1}\ldots a_{2k} = 999\ldots999$$

言い換えれば、$a_1 + a_{k+1} = 9$, $a_2 + a_{k+2} = 9$, $\cdots, a_k + a_{2k} = 9$ とも言える。

(2) 二次曲線の標準化

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f = 0$$（a, b, c, d, e, f：実数）

上記の方程式を満たせば、その方程式で表される図形は必ず二次曲線となる。

(1)(2)について証明した。

３．研究方法

なぜ 6 点が同一楕円上に存在するのかを調べるために次の方法で調べることにした。

(1) 一般に楕円は任意の 5 点を通れば、1 つの楕円が決まることから 6 点のうち 5 点を取り出して 5 点を通る楕円の方程式を求める。

(2) 残りの 1 点が(1)で求めた楕円上に存在するのかを代入して確かめる。

(3) 6 点のうち 3 組の 2 点の中点が一致するので、それが楕円の中心であることを確かめるために(1)の方程式の楕円の中心と一致することを確かめる。

4．結果

(1) (4, 2), (2, 8), (5, 7), (7, 1), (8, 5)の 5 点を取り出した。

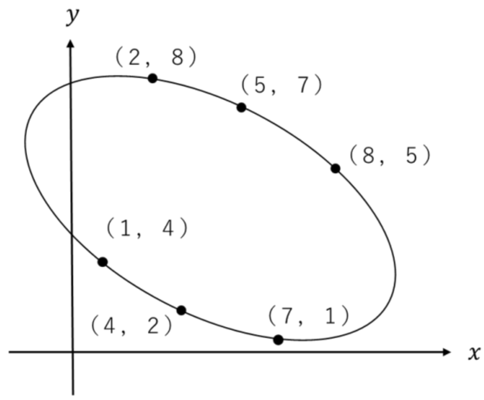
→$19x^2+36xy+41y^2-333x-531y+1638=0$

(2)　$x = 1$のとき　$y=4$

(3)3 組の２点の中点　$\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)$

(1)の式より　楕円の中点　$\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)$

→６点が同一楕円上に存在する。



5．追加研究

1/7 楕円以外にも似た性質をもつ二次曲線を調べることにした。

$\frac{1}{13}$双曲線

$$\frac{1}{13}=0.0769233$$

(0, 7)，(7, 6), (6, 9), (9, 2), (2, 3), (3, 0)の 6 点が取り出せる。

(0, 7)，(7, 6), (6, 9), (2, 3), (3, 0)の 5 点から式の方程式を求める。

→$141x^2+134xy+9y^2-1872y-684y+4347=0$

$x=9$のとき　$y=2$

→6 点は同一双曲線上に存在する。

6．まとめ

改善点：研究課程において手計算で導出していたために追加研究が当初の予定ほど出来なかった。

→演算ソフトを利用する。

発見：素数と平面のグラフと関係は当初無いと考えていたが、Midy の定理などを用いて理解できた。