モンティホール問題に関する考察

数学班 : 中川　未羽

1．はじめに

確率への苦手意識の克服のため確率に関することを研究しようとした。そこで直観的な答えと計算によって出された答えが異なるというモンティホール問題について興味を持った。

2．モンティホール問題とは

確率の問題のひとつで以下の順序で進められる。

1．挑戦者の前にあたりが１つ、はずれが２つの３つの箱がある。
2．挑戦者が箱を１つ選択し、この時点では箱は開けない。
3．司会者はあたりの箱を知っていて、挑戦者の選んでいない残った２つの箱のうちはずれの箱を１つ開ける。
4．挑戦者は選択を変更してもよい機会を与えられる。

選び直す人ははじめに選んだ箱とは違う箱を選ぶこととなり、選び直さない人ははじめに選んだ箱をそのまま選ぶこととなる。

このとき選び直す人と選び直さない人ではどちらのほうがあたる確率が高いか？

確率は次のようにして計算される。

＜選び直す人のあたる確率＞

（ｉ）はじめにあたりの箱を選ぶ場合

$\frac{1}{3}$（３つの箱からあたりを選ぶ確率）×$\frac{0}{1}$（司会者がはずれを１つ開けた後あたりを選ぶ確率）＝０

（ⅱ）はじめにはずれの箱を選ぶ場合

$\frac{2}{3}$（３つの箱からはずれを選ぶ確率）×$\frac{1}{1}$（司会者が挑戦者の選んだ箱以外のはずれを開けた後あたりを選ぶ確率）＝$\frac{2}{3}$

（ｉ）（ⅱ）より、$0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

＜選び直さない人のあたる確率＞

はじめに選んだ箱をそのまま選ぶのではじめにあたりを選べばよいことになり、$\frac{1}{3}$

（３つの箱からあたりを選ぶ確率）

よって、選び直す人のあたる確率は $\frac{2}{3}$ 、選び直さない人のあたる確率は $\frac{1}{3}$ となり、選び直す人のあたる確率のほうが高い。

モンティホール問題において、はじめのあたりの箱とはずれの箱の数が変わると選び直す人と選び直さない人のあたる確率がどうなるのかを調べるため、はじめのあたりをＰ個、はずれをＱ個とおいて考えた。

＜選び直す人のあたる確率＞

（ｉ）はじめにあたりの箱を選ぶ場合

$\frac{P}{P+Q}$（P＋Q 個の箱からあたりを選ぶ確率）×$\frac{P-1}{P+Q-2}$（司会者がはずれの箱を１つ開けた後の P+Q－2 個からあたりを選ぶ確率）＝$\frac{P(P-1)}{(P+Q)(P+Q-2)}$

（ii）はじめにはずれの箱を選ぶ場合

$\frac{Q}{P+Q}$（P＋Q 個の箱からはずれを選ぶ確率）×$\frac{P}{P+Q-2}$（司会者が挑戦者の選んだ箱以外のはずれを開けた後 P＋Q－２個からあたりを選ぶ確率）＝$\frac{PQ}{(P+Q)(P+Q-2)}$

（ｉ）（ii）より$\frac{P(P-1)}{(P+Q)(P+Q-2)}$＋$\frac{PQ}{(P+Q)(P+Q-2)}$＝$\frac{P(P+Q)-P}{(P+Q)(P+Q-2)}$

＜選び直さない人のあたる確率＞

P＋Q 個の箱からはじめにあたりを選べばよいから $\frac{P}{P+Q}$ となる。ここで選び直す人のあたる確率と比較するために分母、分子に（P＋Q－２）をかけると、

$$\frac{P}{P+Q}=\frac{P(P+Q)-2P}{(P+Q)(P+Q-2)}$$

よって選び直す人のあたる確率は $\frac{P(P+Q)-P}{(P+Q)(P+Q-2)}$ 、選び直さない人のあたる確率は $\frac{P(P+Q)-2P}{(P+Q)(P+Q-2)}$ となり、選び直す人のあたる確率のほうが高い。

このように、モンティホール問題でははじめのあたりの数とはずれの数を変化させても必ず選び直す人のあたる確率が高いということが分かる。そこで選び直さない人のほうがあたる確率が高い状況について考えた。

「あたりが２つ、はずれが１つの３つの箱があり司会者は挑戦者あたりの箱を選ぶと、はずれの箱を１つ追加しはずれの箱を選ぶとあたりの箱を１つ追加する」という設定で考えた。

＜選び直す人のあたる確率＞

（ｉ）はじめにあたりの箱を選ぶ場合

$\frac{2}{3}$（３つの箱からあたりを選ぶ確率）×$\frac{1}{3}$（司会者がはずれの箱を１つ追加した後あたりを選ぶ確率）＝$\frac{2}{9}$

（ⅱ）はじめにはずれの箱を選ぶ場合

$\frac{1}{3}$（３つの箱からはずれの箱を選ぶ確率）×$\frac{3}{3}$（司会者があたりの箱を１つ追加した後あたりを選ぶ確率）＝$\frac{1}{3}$

（ｉ）（ⅱ）より、$\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$

＜選び直さない人のあたる確率＞

３つの箱からはじめにあたりを選べばよいから $\frac{2}{3}$ となる。

よって、選び直す人のあたる確率は $\frac{5}{9}$ 、選び直さない人のあたる確率は $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ となり、選び直さない人のあたる確率のほうが高い。

この問題の設定において、はじめのあたりの箱とはずれの箱の数が変わると選び直す人と選び直さない人のあたる確率がどうなるかを調べるためはじめのあたりをＰ個、はずれをＱ個とおいて考えた。

＜選び直す人のあたる確率＞

（ｉ）はじめにあたりの箱を選ぶ場合

$\frac{P}{P+Q}$（Ｐ＋Ｑ個の箱からあたりを選ぶ確率）× $\frac{P-1}{P+Q}$（司会者がはずれを１つ追加した後あたりを選ぶ確率）＝$\frac{P(P-1)}{(P+Q)^2}$

（ⅱ）はじめにはずれの箱を選ぶ場合

$\frac{Q}{P+Q}$（はじめにはずれを選ぶ確率）× $\frac{P+1}{P+Q}$（司会者があたりを１つ追加した後あたりを選ぶ確率）＝$\frac{Q(P+1)}{(P+Q)^2}$

（ｉ）（ⅱ）より、$\frac{P(P-1)}{(P+Q)^2}+\frac{Q(P+1)}{(P+Q)^2}=\frac{P(P+Q)-P+Q}{(P+Q)^2}$

＜選び直さない人のあたる確率＞

P＋Q 個の箱からはじめにあたりを選べばよいから $\frac{P}{P+Q}$ となる。ここで選び直す人のあたる確率と比較するため分母、分子に（P＋Q）をかけると

$$\frac{P}{P+Q}=\frac{P（P+Q）}{（P+Q）^2}$$

よって、選び直す人のあたる確率は $\frac{P(P+Q)-P+Q}{（P+Q）^2}$ 、選び直さない人のあたる確率は

$$\frac{P（P+Q）}{（P+Q）^2}$$

この２つの確率は「－P＋Q」の部分だけが異なるので、－P＋Q＞０のときと－P＋Q＜０のときに場合分けして考える。

・－P＋Q＞０つまり Q>P（はずれの数があたりの数より多い）とき、選び直す人のほうがあたる確率高い

・－P＋Q＜０つまり Q<P（あたりの数がはずれの数より多い）とき、選び直さない人のほうがあたる確率が高い

３.まとめ

モンティホール問題では選び直す人のほうがあたる確率が高い。

問題の設定を変えることで選び直す人と選び直さない人のあたる確率は変化する。

「あたりが２つ、はずれが１つの３つの箱があり司会者は挑戦者あたりの箱を選ぶとはずれの箱を１つ追加しはずれの箱を選ぶとあたりの箱を１つ追加する」という設定に変えると選び直さない人のほうがあたる確率が高くなる。

また、この変更した設定においては、はじめのはずれの数があたりの数より多いとき選び直す人のほうがあたる確率が高く、はじめのあたりの数がはずれの数より多いとき選び直さない人のほうがあたる確率が高い。