２次方程式の虚数解の視覚化

数学班：善本　菜花

１．はじめに

実数解を持つ２次方程式のグラフはＸ軸との共有点を持つが、実数解を持たない、すなわち虚数解を持つ２次方程式のグラフはＸ軸との共有点を持たない。虚数解とは一体何なのか、グラフ上で見ることはできないのかが気になり、虚数解も表せるグラフについて研究することにした。

２．研究内容

２次方程式の解をはじめから複素数 $x+yi$ $(x,y$は実数$)$として考える。解を$x+yi$におきかえた方程式の解 x,y を求めることで、もとの方程式の解を導ける。

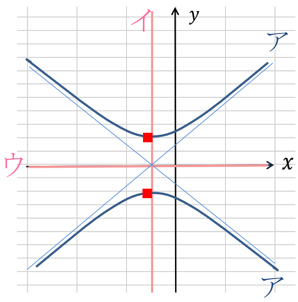
（例）$X^2+X+1=0$

$X=x+yi$ におきかえると、$(x+yi)^2+(x+yi)+1=0$

実部と虚部に整理すると、$(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}-\mathrm{y}^2+1)+\mathrm{i}(2\mathrm{xy}+\mathrm{y})=0$

よって、$\begin{cases} x^2+x-y^2+1=0 \ldots ① \\ 2xy+y=0 \qquad \ldots ② \end{cases}$

方程式①, ②をxy平面のグラフで表したときの共有点が連立方程式の解を表す。



方程式①を変形すると、

双曲線 $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}-\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=-1$（漸近線：$\mathrm{y}=\pm\mathrm{x}\pm\frac{1}{2}$）…ア

方程式②を解くと、

直線 $x=-\frac{1}{2}$　…イ ，直線 $y=0$ …ウ

となり、グラフの形は左図のようになる。

共有点 $(x,y)=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ より、$X=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

共有点の座標が表す解は、もとの２次方程式の解の公式から得られる値と一致する。このようにして、２次方程式の虚数解も共有点としてグラフに表すことができた。

次にグラフを一般化し、$aX^2+bX+c=0$（a,b,cは実数$,a\neq 0$）とする。
同様に $X=x+yi$ と置き換えて整理すると、以下のような連立方程式が得られる。

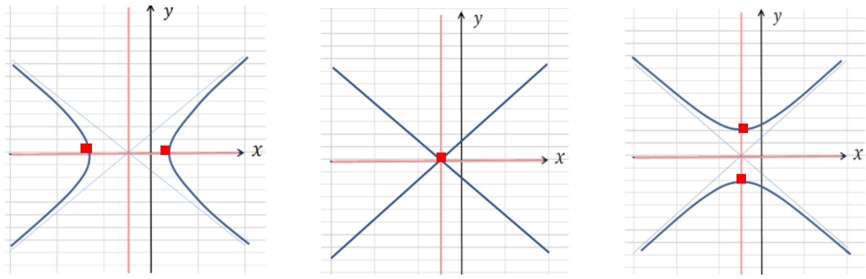
$\begin{cases} ax^2+bx-ay^2+c=0 \ldots ③ \\ 2axy+by=0 \qquad \ldots ④ \end{cases}$

方程式③については判別式の種類によってグラフの形が変わる。④については、$x=$

$-\frac{b}{2a}, y=0$ の直線となる。

判別式の種類別に方程式③、④をグラフに表すと、グラフの形および共有点は次のように分類される。

$D>0$　　　　　　　　$D=0$　　　　　　　　$D<0$



$\left(\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, 0\right)$　　　　$\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$　　　　$\left(-\frac{b}{2a}, \pm\frac{\sqrt{-D}}{2}\right)$

※$\frac{b}{2a}$ の値がグラフの左右の平行移動に影響する。

このようにして、実数解も虚数解も共有点としてグラフに表すことができた。

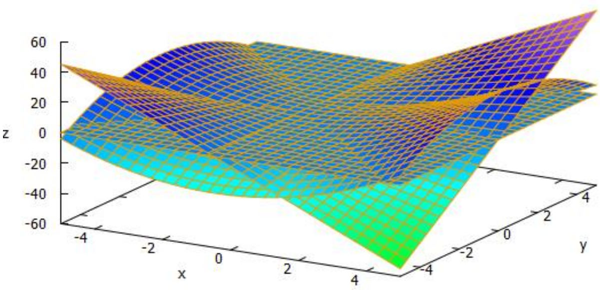
さらに、虚数解を表せるグラフと普段私たちが見ている放物線のグラフとのつながりを見るために、グラフの３次元化をした。

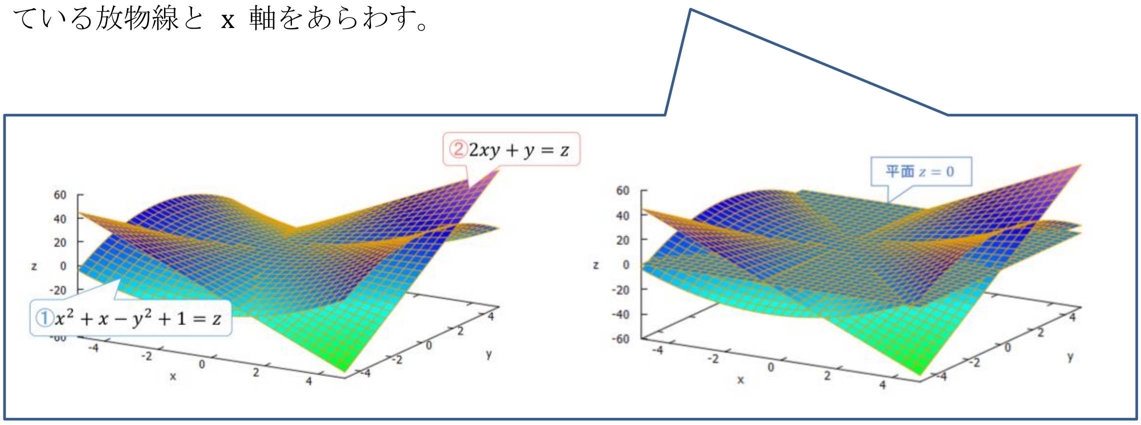
①, ②の方程式の右辺を変数 z に置き換えて、それぞれの方程式 (①$'$, ②$'$とする) を x, y, zの３次元のグラフで表すと次のようになる。

$$\begin{cases} x^2+x-y^2+1=z \ \ldots ①' \\ 2xy+y=z \quad\quad\quad \ldots ②' \end{cases}$$

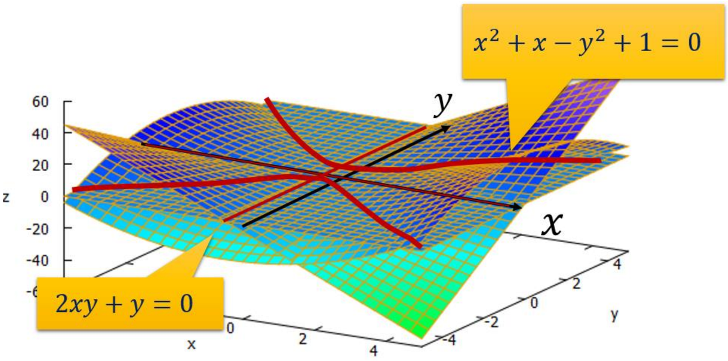
$z=0$ のとき①$'$, ②$'$は z に置き換える前の方程式①, ②をあらわす。

$y=0$ のとき①$'$は $z=x^2+x+1$, ②$'$は $z=0$ となり私たちが普段見ている放物線と x 軸をあらわす。

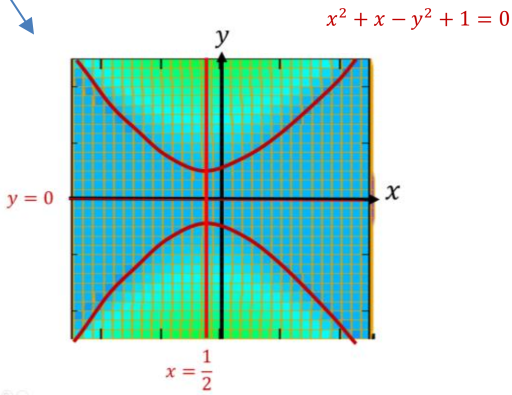




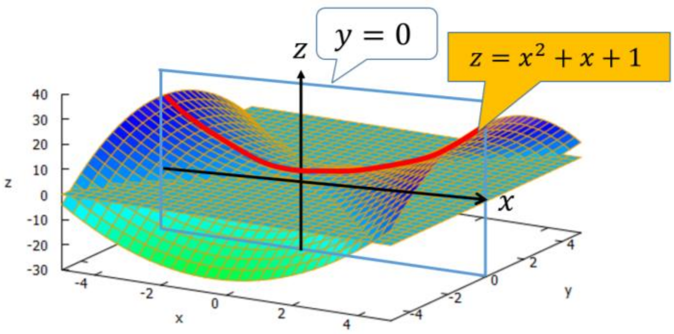
$z=0$ の平面について考えると、



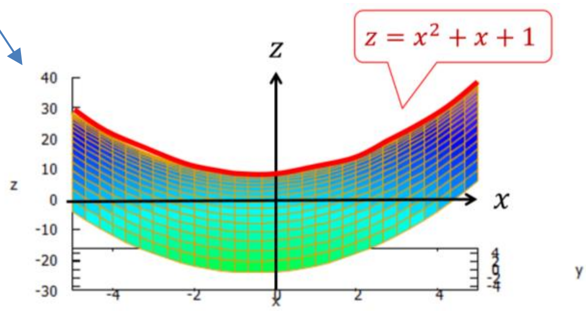
$z=0$ の平面を取り出してみると
方程式①, ②を表すグラフがあらわれる



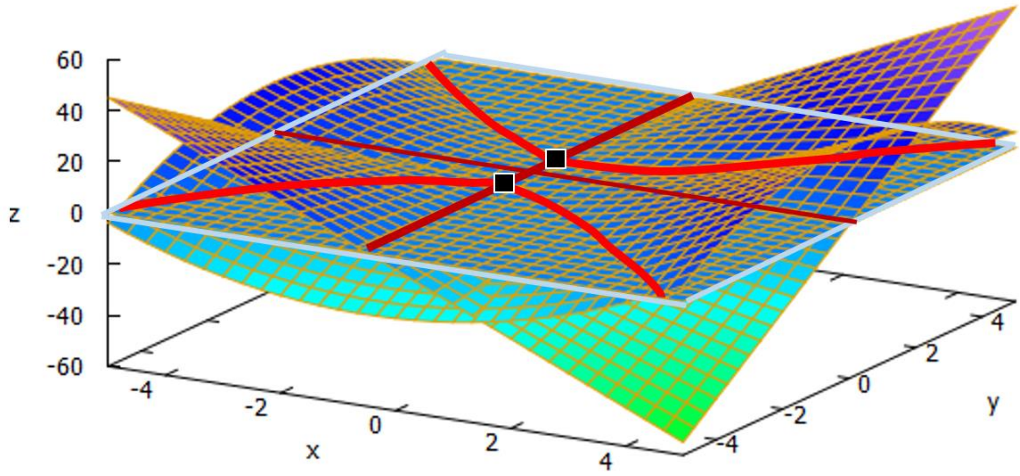
$y=0$ の平面についてかんがえると、



$y=0$ の平面をとりだすと
私たちが普段見ている放物線
のグラフが現れる



このようにして、普段私たちが見ている放物線のグラフは $y=0$ の平面と①′,②′がぶつかる部分、虚数解を表せるグラフは $z=0$ の平面と①′,②′ぶつかる部分であり、虚数解は $z=0$ の平面に存在することが分かった。



3．まとめ

解をはじめから複素数 $x+yi$ として考えることで、虚数解も共有点としてグラフに表すことができた。また、変数 z を加え 3 次元の空間で考えたとき、虚数解は私たちが普段見ている平面のグラフの奥行きの部分に存在すると言える。