カードマジックに関する数学

数学班：木村　友哉

１．はじめに

種や仕掛けはないのにカードの数字を当てるあるマジックがあり、そのマジックに数学が利用されているということに興味を持った。どういった方法で数学がマジックに関わっているのかを調べ、カードの枚数などを変更した際に起こる変化についても調べることにした。

２．マジックの概要

マジックの手順は、下の通りとする。

①答えのカードを含む１５枚のカードで、１組５枚の山札を３組作る。

②相手に答えのカードを含む山札を教えてもらい、その山札が真ん中になるように残りの山札を上下に（この場合１組ずつ）同じ向きに重ねて、１つの山札にする。

※相手に答えのカードを含む山札を教えてもらう際、行う側は相手にカードの山札を見せる。

③カードを上から１組目，２組目，３組目，１組目，…と順に配り直し、①と同じように１組５枚の山札を３組作る。

①②③を繰り返し、３回目に相手に教えてもらった山札の真ん中のカードが答えのカードとなる。

３．研究方法

答えのカードが山札の上から何番目にあるかをＰとおき、山札を組みなおす（２．の③を行う）度にＰの範囲がどう変化するのかを数式を用いて調べ、最終的にＰの範囲が山札の真ん中の値と一致することを見た。また、カードの枚数ｎ，山札の組数Ｎを変更した際、２．の結果と比べてどのような変化が起こるのかを調べた。

４．補題の紹介

マジックの証明にあたって、２つの補題を用いた。

⑴ｎ枚のカードをm組に振り分けたときに最後のカード（ｎ番目のカード）が下から何番目にあるかをＰとおくと、$P = f\left(\frac{n}{m}\right)$：$\frac{n}{m}$以上の最小の整数　で表される。

⑵ $q_1 \leqq q_2$とし、関数ｆ（ｑ）：ｑ以上の最小の整数に代入したとき、$f(q_1) \leqq f(q_2)$となる。

（補題(1)の証明）

f $\left(\frac{n}{m}\right)$ は $\frac{n}{m}$ 以上の最小の整数と定める。

ｎをｍで割った商をＱ、余りをＲとする。（Ｑ，Ｒはともに０以上の整数）
このとき、ｎ＝ｍＱ＋Ｒで表される。（０≦Ｒ＜ｍ）
① （ｉ）Ｒ＝０のとき　ｎ＝ｍＱ
　このｎ枚のカードをｍ組に振り分けたとき、Ｐ＝Ｑとなる。
（ⅱ）０＜Ｒ＜ｍのとき　ｎ＝ｍＱ＋Ｒ
　このｎ枚のカードをｍ組に振り分けたとき、余りで山札がもう１段できる（Ｑが１増える）ので、Ｐ＝Ｑ＋１

② （ｉ）Ｒ＝０のとき　f $\left(\frac{n}{m}\right)$ にｎ＝ｍＱを代入し、f $\left(\frac{n}{m}\right)$＝ｆ（Ｑ）＝Ｑ

（ⅱ）０＜Ｒ＜ｍのとき　f $\left(\frac{n}{m}\right)$ にｎ＝ｍＱ＋Ｒを代入し、f $\left(\frac{n}{m}\right)$＝ｆ $\left(Q+\frac{R}{m}\right)$

０＜Ｒ＜ｍより、$0<\frac{R}{m}<1$　よってｆ $\left(Q+\frac{R}{m}\right)$＝Ｑ＋１

①，②より、Ｐ＝ｆ $\left(\frac{n}{m}\right)$

（補題(2)の証明）
$q_1=m_1+\alpha_1$ 、$q_2=m_2+\alpha_2$（m_1、m_2 は整数、$0\leqq\alpha_1<1$ 、$0\leqq\alpha_2<1$）と表す。
（ｉ）$\alpha_1=0$ 、$\alpha_2=0$ のとき、$f(q_1)=m_1\leqq m_2=f(q_2)$ である。
（ⅱ）$\alpha_1=0$ 、$\alpha_2\neq 0$ のとき、$q_1\leqq q_2$ より、$m_1\leqq m_2+\alpha_2$ となり、
$m_1\leqq m_2$である。これより、$f(q_1)=m_1\leqq m_2\leqq f(q_2)$ となる。
（ⅲ）$\alpha_1\neq 0$ 、$\alpha_2=0$ のとき、$q_1\leqq q_2$ より、$m_1<m_1+\alpha_1\leqq m_2$ である。
m_2 は整数だから、$m_1+1\leqq m_2$ である。
よって、$f(q_1)=m_1+1\leqq m_2=f(q_2)$ となる。
（ⅳ）$\alpha_1\neq 0$ 、$\alpha_2\neq 0$ のとき、$q_1\leqq q_2$ より、$m_1+\alpha_1\leqq m_2+\alpha_2$ である。
これより、$-1<\alpha_1-\alpha_2\leqq m_2-m_1$ となり、m_2-m_1 が整数だから、$0\leqq m_2-m_1$ である。従って、$m_1\leqq m_2$ となり、$f(q_1)=m_1+1\leqq m_2+1=f(q_2)$ となる。
（ｉ）～（ⅳ）より、$f(q_1)\leqq f(q_2)$ であることが分かる。

５．元のマジックの証明

答えのカードが１つの山札の上から何番目にあるかをＰ（Ｐは自然数）とする。
相手に答えのカードを含む山札を教えてもらう回数が１回目の時、$1\leqq P_1\leqq 5$
残りの山札を上下に重ねたとき、$1+5\leqq P_1+5\leqq 5+5$
よって$6\leqq P_1+5\leqq 10$

この１つに重ねた山札を３組に振り分けるので、補題１，２より、

$f(\frac{6}{3}) \leqq f(\frac{P_1+5}{3}) \leqq f(\frac{10}{3})$　よって $2 \leqq f(\frac{P_1+5}{3}) \leqq 4$

$f(\frac{P_1+5}{3})$ は答えのカードが１つの山札の下から何番目にあるかを表している。

ここで、答えのカードを含む山札を教えてもらう回数が２回目の時点のＰを P_2 とすると、$P_2 = 5 - f(\frac{P_1+5}{3}) + 1 = 6 - f(\frac{P_1+5}{3})$ である。

$2 \leqq f(\frac{P_1+5}{3}) \leqq 4$ であるから、$2 \leqq P_2 \leqq 4$ となる。

再び残りの山札を上下に重ねたとき、$2+5 \leqq P_2+5 \leqq 4+5$ となり、$7 \leqq P_2 \leqq 9$
この１つに重ねた山札を３組に振り分けるので、補題１，２より、

$f(\frac{7}{3}) \leqq f(\frac{P_2+5}{3}) \leqq f(\frac{9}{3})$ である。従って、$3 \leqq f(\frac{P_2+5}{3}) \leqq 3$ すなわち

$f(\frac{P_2+5}{3}) = 3$ となる。$f(\frac{P_2+5}{3})$ は答えのカードが１つの山札の下から何番目にあるかを表している。ここで、答えのカードを含む山札を教えてもらう回数が３回目の時点のＰを P_3 とすると、$P_3 = 5 - f(\frac{P_2+5}{3}) + 1 = 6 - f(\frac{P_2+5}{3}) = 6 - 3 = 3$ である。

したがって答えのカードは、答えのカードを含む山札を教えてもらう回数が３回の時点で、５枚のカードのうち上から数えて３番目、すなわち山札の真ん中にくる。

６．研究結果

(1) １つの山札のカードの枚数と山札の組数をそれぞれ５枚ｎ組（ｎは５以上の奇数）にしたとき、相手に答えのカードを含む山札を教えてもらう回数は３回から２回になった。

(2) １つの山札のカードの枚数と山札の組数をそれぞれＮ枚Ｎ組（Ｎは３以上の奇数）にしたとき、相手に答えのカードを含む山札を教えてもらう回数は３回から２回になった。

７．６－(1)の証明

答えのカードが１つの山札の上から何番目にあるかをＰ（Ｐは自然数）とする。
相手に答えのカードを含む山札を教えてもらう回数が１回目の時、$1 \leqq P_1 \leqq 5$
残りの山札を上下に重ねたとき

$$5\frac{n-1}{2} + 1 \leqq P_1 + 5\frac{n-1}{2} \leqq 5\frac{n-1}{2} + 5$$

この山札をｎ組に振り分けるので、補題１，２より

$$f\left(\frac{5^{\frac{n-1}{2}}+1}{n}\right) \leqq f\left(\frac{P_1+5^{\frac{n-1}{2}}}{n}\right) \leqq f\left(\frac{5^{\frac{n-1}{2}}+5}{n}\right)$$

整理して、$f\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2n}\right) \leqq f\left(\frac{P_1+5^{\frac{n-1}{2}}}{n}\right) \leqq f\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2n}\right)$

ここでｎは５以上の奇数であるから、$0 \leqq \frac{3}{2n} \leqq \frac{3}{10}$　よって、$-\frac{3}{10} \leqq -\frac{3}{2n} \leqq 0$

したがって $\frac{5}{2}-\frac{3}{10} \leqq \frac{5}{2}-\frac{3}{2n} \leqq \frac{5}{2}$ より、$\frac{11}{5} \leqq \frac{5}{2}-\frac{3}{2n} \leqq \frac{5}{2}$

ゆえに $f\left(\frac{11}{5}\right) \leqq f\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2n}\right) \leqq f\left(\frac{5}{2}\right)$ となるので、$f\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2n}\right)=3$　…①

また、$0 \leqq \frac{5}{2n} \leqq \frac{1}{2}$ より、$\frac{5}{2} \leqq \frac{5}{2}+\frac{5}{2n} \leqq 3$

よって $f\left(\frac{5}{2}\right) \leqq f\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2n}\right) \leqq f(3)$ となるので、$f\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2n}\right)=3$　…②

①、②より、$f\left(\frac{P_1+5^{\frac{n-1}{2}}}{n}\right)=3$

$f\left(\frac{P_1+5^{\frac{n-1}{2}}}{n}\right)$ は答えのカードが１つの山札の下から何番目にあるかを表している。
ここで、答えのカードを含む山札を教えてもらう回数が２回目の時点のＰを P_2 とすると、$P_2=5-f\left(\frac{P_1+5^{\frac{n-1}{2}}}{n}\right)+1=5-3+1=3$
よって答えのカードは、答えのカードを含む山札を教えてもらう回数が２回の時点で、５枚のカードのうち上から数えて３番目、すなわち山札の真ん中にくる。

８．６－(2)の証明

答えのカードが１つの山札の上から何番目にあるかをＰ（Ｐは自然数）とする。
相手に答えのカードを含む山札を教えてもらう回数が１回目の時、$1 \leqq P_1 \leqq N$

残りの山札を上下に重ねたとき、$N^{\frac{N-1}{2}}+1 \leqq P_1+N^{\frac{N-1}{2}} \leqq N^{\frac{N-1}{2}}+N$

この山札をＮ組に振り分けるので、補題１，２より

$$f\left(\frac{N^{\frac{N-1}{2}}+1}{N}\right) \leqq f\left(\frac{P_1+N^{\frac{N-1}{2}}}{N}\right) \leqq f\left(\frac{N^{\frac{N-1}{2}}+N}{N}\right)$$

整理して　$f\left(\frac{N-1}{2}+\frac{1}{N}\right) \leqq f\left(\frac{P_1+N^{\frac{N-1}{2}}}{N}\right) \leqq f\left(\frac{N+1}{2}\right)$

ここで、Nは３以上に奇数であるから$\frac{N-1}{2}$, $\frac{N+1}{2}$は整数であり、また$0<\frac{1}{N}\leqq 1$

このことから、$f\left(\frac{N-1}{2}+\frac{1}{N}\right)=\frac{N+1}{2}$, $f\left(\frac{N+1}{2}\right)=\frac{N+1}{2}$

よって、$f\left(\frac{P_1+N\frac{N-1}{2}}{N}\right)=\frac{N+1}{2}$ となる。

$f\left(\frac{P_1+N\frac{N-1}{2}}{N}\right)$は答えのカードが１つの山札の下から何番目にあるかを表している。

ここで、答えのカードを含む山札を教えてもらう回数が２回目の時点のＰをP_2とすると、$P_2=N-f\left(\frac{P_1+N\frac{N-1}{2}}{N}\right)+1=N-\frac{N+1}{2}+1=\frac{N+1}{2}$

よって答えのカードは、答えのカードを含む山札を教えてもらう回数が２回の時点で、Ｎ枚のカードのうち上から数えて$\frac{N+1}{2}$番目、すなわち山札の真ん中にくる。

９．考察

上記のことから、研究したマジックにおいて答えのカードを発見するために、ガウス記号に類似した関数や不等式が用いられていた。また、１つの山札のカードの枚数や山札の組数を特定の条件に変更すると、山札を教えてもらう回数が３回から２回に減った。私はこの研究を通して、他のマジックにも様々な数学の性質が用いられているのではないかと感じた。今後は、他のマジックに利用できる数学的性質を探し、それを元に新たなマジックを考案していきたい。