微分法の源流

数学班：垣内　悠斗

１．はじめに

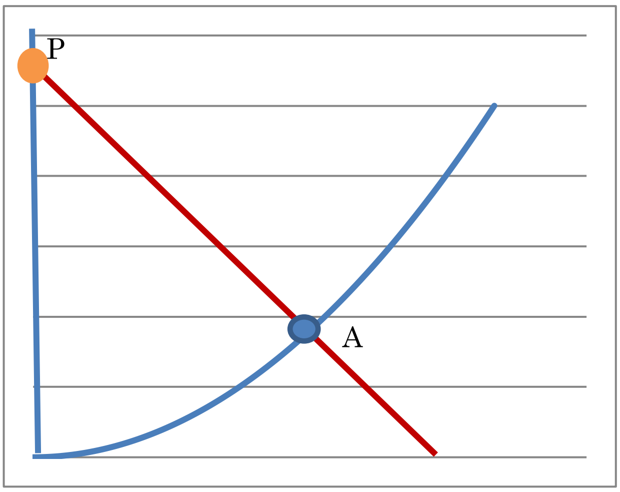
現在曲線に対して接線を引く方法として二種類の方法が知られている。それぞれの方法の歴史を調べると、重解条件を用いて接線を引く方法はデカルトの方法に由来していることが分かった。また、微分法はフェルマーの方法に由来していることがわかった。そこで、私はフェルマーの方法にとくに興味を持ち、現代の微分法とフェルマーの方法にはどのような共通点があり、どのような点において違いがあるのか考察した。

２．研究内容

「微分積分学の誕生(高瀬　2015)」を読み、そこに書かれているフェルマー及びデカルトの方法で楕円に対して接線を引く方法を応用し、二次関数に接線を引き、最終的にはフェルマーの方法を一般化し、現代の微分法との違いを探った。また、フェルマーは、特定の曲線に対してしか接線を引いていないので、任意の曲線に対する一般化を試みた。

３．デカルトの方法

デカルトは接線を引く方法ではなく法線を引く方法を考えた。法線とはその点において、グラフと垂直に交わる直線のことである。接線と法線はその点において垂直に交わるため、私は法線を求めることにより、接線を引くことができると考えた。以下はその方法を二次関数に応用したものである。



方針

① $y=x^2$上の$A(a,a^2)$における法線を考え、その法線とy軸との交点を$P(0,p)$とする。

② 点Pを中心とする円を考える。

③ 円と$y=x^2$の連立方程式を立て、重解を持つ場合を考える。

sは, 点pと点aを結ぶ線分の長さであり、ピタゴラスの定理を用いて立式する。

（計算式）

$x^2 + (p - y)^2 = s^2$

$y^2 - 2py + p^2 + x^2 - s^2 = 0$

$x^2 = y$より

$y^2 - (2p - 1)y + p^2 - s^2 = 0$

ここで、この式をyに関する二次方程式とみると、yは点pを中心とする円と、$y = x^2$との交点を表している。ここで、この関数が重解を持つときのみ、点Aと点Pを結んだ線分が円の半径に一致し、その線分が法線になる。またそのときの値は、点Aのy座標に一致する。よって、

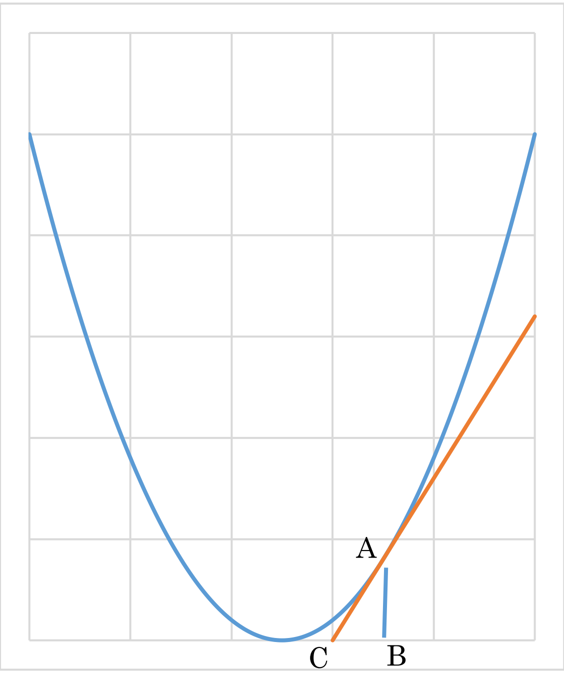
$$\frac{2p - 1}{2} = a^2$$

$$p = a^2 + \frac{1}{2}$$

以上より、pの座標を、aを用いて表すことができたので、デカルトの方法において、接線を引くことができたといえる。

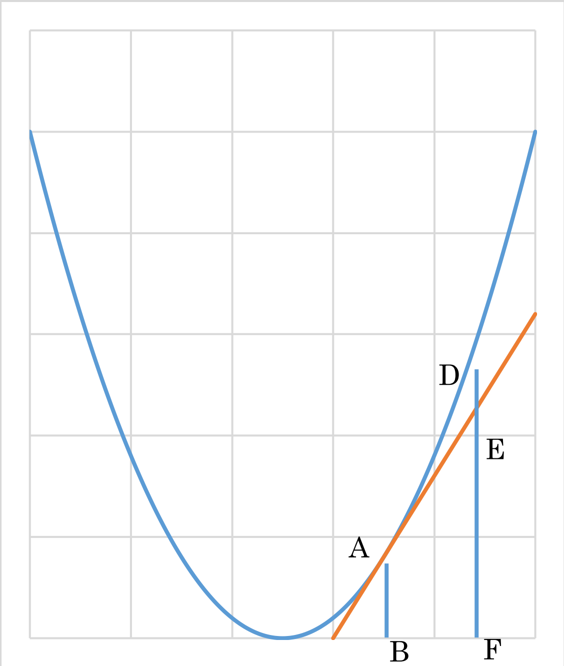
４．フェルマーの接線法

フェルマーは接線を斜辺とする二つの三角形を考えた。それらの三角形の形状比を用いた不等式を立式し、計算途中でそれら二つの三角形が同一のものであるとみなし、等式を立てて解く、というものだ。以下は、その方法を二次関数$y = x^2$に応用したものである。



方針

左図は接線が引けたとして、その接点$A(a, a^2)$からx軸に対して垂線を下ろしたものである。垂線の足を$B(a, 0)$、接線と、x軸との交点を$C(c, 0)$とする。点Cを求めることにより二点が定まるので、接線を求めることができる。



ここで$x=a+e$と、接線、放物線との交点について考える。すると、
左図のようになる。ここで、$x=a+e$と放物線、接線、x軸との交点をそれぞれD、E、Fとおく。すると、
⊿CAB∽⊿CEF であるので、

$$\frac{AB}{CB}=\frac{EF}{CF}$$

また、$\mathrm{DF}>\mathrm{EF}$であるので、

$$\frac{AB}{CB}<\frac{DF}{CF}$$

であるが、e=0 であるとき、点 D と点 E が一致すると考え、上記の不等式が等式とみなせると考える。

（計算式）

$$\left(\frac{a^2}{a-c}\right)<\left\{\frac{(a+e)^2}{a-c+e}\right\}$$

展開して整理すると

$2ace<(a-c)e^2+a^2e$

$e>0$より、両辺をeで割ると

$2ac<a^2+(a-c)e$

ここで$e=0$と倒置し、等式へと書き換えると

$2ac=a^2$

これを解いて、$c=\frac{1}{2}a$

よってa(任意)の値を用いて、点Cの座標を表すことができたので、にんいの点に対する接線を求めることができた。

５．一般化

続いてフェルマーの方法を一般的な関数に対して応用していきたいと思う。なお、今回は計算の都合上、多項式のみに対しての一般化を試みた。方針については、「4. フェルマーの接線法」で説明したものと同じであるため割愛する。任意の曲線を$f(x)$とし、x座標がaである点における接戦を求める。また、「4. フェルマーの接線法」と同様に、c,eを置く。以下に計算式を記す。

（計算式）

$$\frac{f(a)}{a-c}<\frac{f(a+e)}{a-c+e}$$

整理すると

$ef(a) < (a-c)\{f(a+e)-f(a)\}$

両辺をeで割ると

$f(a) < (a-c)\frac{\{f(a+e)-f(a)\}}{e}$

ここで、$f(x)$は多項式であるので、$f(a+e)$を計算して出てくる項のうち、係数にeを含まないものは、$f(a)$からも出てくるため、$f(a+e)-f(a)$を計算すると全ての項が係数にeを含んでいることになる。よって、$\frac{\{f(a+e)-f(a)\}}{e}$は割り切れ、さらに、$e=0$を代入したものを $g(a)$と置くと

$f(a) < (a-c)\ g(a)$

cについて解くと

$c = a - \frac{f(a)}{g(a)}$

となり、cの座標をaを用いて表すことができたので、一般的な多項式であらわされる関数において、任意の点に関する接線を求めることができた。

また、 $g(a)$の値はその関数のx座標がaである点の微分係数と等しくなる。よって、$g(a)$ =0, すなわち傾きが0である点上においては、接線の方程式を求めることができない。これは、現代の微分方と大きく異なっており、このことは、傾き0である点から接線を引いた際、x軸と平行となり、交点が存在しないことからも確認できる。

6. まとめ

デカルトやフェルマーの、接線を引く方法を応用することにより、$\mathrm{y} = x^2$上の任意の点に対して接線の方程式を求めることができることがわかった。また、フェルマーの方法を多項式に対して一般化することにより、現代の微分法とよく似ている点や、現代とはまったく違っている点についても知ることができた。