３次方程式の解の公式に関する考察

数学班：宇治　優人

１．研究の動機

１８２４年にアーベル・ルフィニが５次以上の次数の方程式には解の公式がない（方程式の加減乗除およびべき根をとるという操作だけでは、解を表示できない）ことを証明した。その証明にはラグランジュが辿り着いた「解の入れ替え」という方法が取り入れられた。今回はその方法を３次方程式に適用したときに生じたある問題点について気になったので調べてみた。

２．研究方法

５次以上の方程式の解の可解性について文献を用いて手計算で検証しながら勉強し、その方法を３次方程式に適用した。

３．２次方程式の場合

今回は２次方程式を「$x^2+ax+b=0$」とおく。この方程式の２解をx_1, x_2と置いたときその２解は２次方程式の解の公式より方程式の係数を用いて以下のように表される。（ルートの前の符号が＋の方をx_1とする。）

$$x_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \qquad x_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

ここでこの２解x_1, x_2を入れ替えてみると

$$x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \qquad x_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \qquad (\mathrm{a}=-(x_1+x_2),\ \mathrm{b}=x_1x_2)$$

となる。左辺は値が入れ替わっているが、右辺は「解と係数の関係」から係数が解の対称式で表されることから、値が変化していないように思うかもしれない。しかし実はルートの中の式に秘密がある。係数を用いた表示を「解と係数の関係」を用いて解の対称式で置き換えると、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-4b} &= \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\\ &= \sqrt{(x_1-x_2)^2}\\ &= x_1-x_2 \qquad (\sqrt{(x_1-x_2)^2}=x_1-x_2 \text{ と定める})\end{aligned}$$

この式変形から「対称式のルートを取るとその式も対称式であるとは限らない。」ということが分かる。（「反対称式」・・・奇数回の置換で値が変化する式）

このような式変形を行うことで、解の公式に対して冪根をとるという作業をすることによって解の入れかえで値が変化していることがわかる。

$$x_1 = \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_1-x_2}{2}$$（入れかえ前）

$$x_2 = \frac{x_2+x_1}{2} + \frac{x_2-x_1}{2} = \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_1-x_2}{2}$$（入れかえ後）

４．３次方程式の場合

ここまでの方法を３次方程式に適応させて考えると、「３次方程式の解の公式をつくるには、係数の３乗根が必要である」と考えられる。これについて証明する。

＊「解の公式」はあらゆる文字（ここでは解）の置き換えに対して値を変化させる性質を持っている式である。

証明

一般の３次方程式の解の公式を

$x_1 = f_{1(1,2,3)} + \Delta(1,2,3) f_{2(1,2,3)}$

$x_2 = g_{1(1,2,3)} + \Delta(1,2,3) g_{2(1,2,3)}$

$x_3 = h_{1(1,2,3)} + \Delta(1,2,3) h_{2(1,2,3)}$　（$\mathrm{f, g, h}$ ：対称式、Δ：反対称式）

このようにおく。

＊「$f_1 + \Delta f_2$」の形で表された式は解の入れ替えを奇数回行うときは値が変わるが、偶数回行うときには値が変わらないという性質を持っている。

今回はx_i $(\mathrm{i} = 1,2,3)$について１→２→３→１の順に文字を置き換えるとすると次の式のようになる。

$x_2 = f_{1(2,3,1)} + \Delta(2,3,1) f_{2(2,3,1)}$

左辺は入れ替わったが右辺はすべて値が変わっていないため、矛盾する。この矛盾を解消するためには冪根をとる必要がある。

「$\mathrm{f} = f_1 + \Delta f_2$」とおき、「$f' = \sqrt[p]{f}$」とおくと

「$\mathrm{f} = f'^{p}$」

f'を１回の巡回置換した時の比を、εとすると

「$\varepsilon f'$」

また「f」は巡回置換（偶数回の置換）で値が変わらない式なので、

「$\mathrm{f} = (\varepsilon f')^p$」よって、「$\varepsilon^p = 1$」・・・①

また３次（３文字）の場合、３回の巡回置換を行えば元の値に戻るため、

「$\varepsilon^3 = 1$ 」　・・・②

①　②　より　　$\mathrm{p} = 3\mathrm{k}$　（kは整数）

したがって、３乗根を取らなければならないことが分かった。

５．特殊な形の方程式

　一般の３次方程式の解の公式に対し３乗根を取ることが分かったが、特殊な形の方程式においては３乗根を使わなくとも解を表すことのできるものを見つけ調べた。その式とは、以下のような式である。

「$x^3+ax^2+ax+1=0$」（係数が真ん中の項で対称になっている。）

この方程式を解くと

$$x=-1,\frac{a-1\pm\sqrt{a^2-2a-3}}{2}$$

となり、３乗根を使わずに表されていることが分かる。

調べた結果、解の対称式で表されているときには３乗根が必要であるが、解と係数の関係を用いて方程式の係数に置き換えると３乗根が外せることが分かった。

６．まとめ

今回の研究では、アーベルとラグランジュによる解の置き換えを学びそれを応用して特殊な方程式に関して研究した。３乗根が外せる理由を見つけることができた。次は方程式ごとに方程式が解けるか解けないかを分類したガロアの群論を学んでいきたい。群論を用いれば今回の様な特殊な形の方程式について別の観点からもう少し詳しく調べられると思われる。

７．参考文献

「代数方程式のはなし」今野一宏著