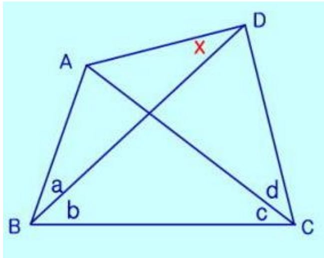
ラングレーの問題について

数学班：大村　朱乃

１．研究の動機

ラングレーの問題とは、整角四角形(4 辺及び対角線の成す角度が全て整数になる四角形)において右図のように角度 a, b, c, d が与えられているときに角度 x を求める問題である。一見易しい問題に見えるが、一般的な解法や公式は未だに発見されていない。そこで私は、x を a, b, c, d で表すことに興味を持ち、研究に取り組んだ。



↑ラングレーの問題を
一般化したもの

２．調査方法

(1) 公式の導出

正弦定理を用いた。上図の四角形に含まれる三角形について正弦定理の等式をそれぞれ作り、それらの等式同士を辺々で割るなどして、三角関数の式になるように整理していった。

(2) 公式の運用

①Excel を用いた a, b, c, d の組み合わせの発見

a, b, c, d の組み合わせの数は膨大であるため、今回は a=10°, 20°, 30°…、b=c+10° =d+30° という条件を設定した。この条件はラングレーが発表した最初の問題(a, b, c, d, x)=(20, 60, 50, 30, 30)を元にした。

以上の条件を満たすように a と b を動かして、x が整数になった時の a, b, c, d の組み合わせを調べた。

②三角関数を用いた x の算出

この調査は(1)で得た式の検算として行った。ラングレーが発表した最初の問題(a, b, c, d, x)=(20, 60, 50, 30, 30)の値を(1)で得た公式に代入し、左辺と右辺が一致するかどうかを手計算で調べた。

３．結果

(1)式変換の結果、以下の公式を得た。

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin a \cdot \sin c \cdot \sin(b+c+d)}{\sin(a+b+c) \cdot \sin(c+d) - \sin c \cdot \sin(b+c+d) \cdot \cos a}}$$

(2)①11 通りの組み合わせが見つかった。それらの(a, b, c, d, x)の値は全て 5 の倍数であった。

②加法定理や積和の公式などの高校数学の知識を用いて、変換することが出来た。

４．考察

3.(2)②の結果から、得られた公式は確かなものであることが分かった。

また、2.(2)①の Excel を用いた研究において、整数であるとみなした x の値は、あくまでも近似値を取ったものであるため、その近似値が本当にラングレーの問題に当てはまるかは不明である。

５．まとめ

当初の目的であった x についての式を求めることは出来なかったが、tanx を a,b,c,d の三角比を用いて表すことに成功した。また、得られた公式を用いることで、初等幾何を用いずにラングレーの問題を解くことが可能となった。

６．今後の課題

2.(2)②のようにして、公式に a,b,c,d を代入し手計算で x を求めることも不可能ではないが、素早く値を求めることには不向きであると考えられる。そのため、今後は右辺の簡略化に取り組み、より公式としての実用性を高めていきたい。また、考察で述べた通り、2.(2)①の Excel を用いて導いた結果が等式を満たすかどうかの検証も進めていきたい。

７．参考文献ならびに参考 Web ページ

・『ラングレーの問題にトドメをさす！～4 点の作る小宇宙完全ガイド～』斉藤浩(現代数学社)

・ラングレーの問題の初等幾何による証明 12 選+α

http://www.gensu.co.jp/saito/challenge/langley.html

・ラングレーの問題、整角四角形

http://www.himawarinet.ne.jp/~rinda/framepage1.html