関孝和による円周率の計算

数学班　　山下真里佳

1. はじめに

関孝和とは、江戸時代に活躍した数学者である。関は、独自の方法を用いて、円周率の近似値をかなり正確に求めている。コンピューターのない時代に、どのような工夫で計算を実行したのか興味を持った。

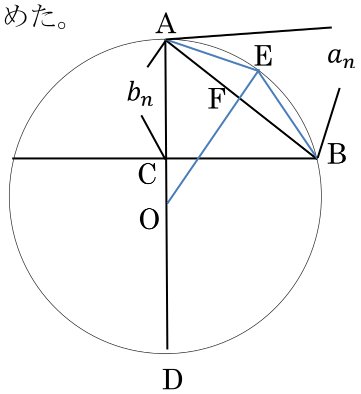
まず、関が考えた円周率の計算方法を紹介する。また、関の方法で求めた円周率と実際の円周率の差を求める。

2. 関の方法

直径1の円に内接する正2^n角形を考える。nを限りなく大きくすると、正2^n角形は円に近づく。正2^n角形の 1 辺の長さをa_n、周の長さをS_nとすると、$S_n = a_n \times 2^n$と表せる。

いま、直径 1 の円を考えているので、$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi$である。

関は以下のように、a_nについての漸化式を立て、S_nを求めた。



△ABD∽△ACB より

AB：AD=AC：AB　∴AB^2=AC・AD=AC

よって AC=b_nとすると、${a_n}^2 = b_n$…①

弧 AB の中点を E とおくと、△ABC∽△EBF より

BE=a_{n+1}とあらわせる。

したがって EF= b_{n+1}とあらわせる。

三平方の定理より、$(a_{n+1})^2 - (b_{n+1})^2 = \left(\frac{1}{2}a_n\right)^2$

また、${a_n}^2 = b_n$より、${a_{n+1}}^2 = b_{n+1}$ これを代入して整理すると

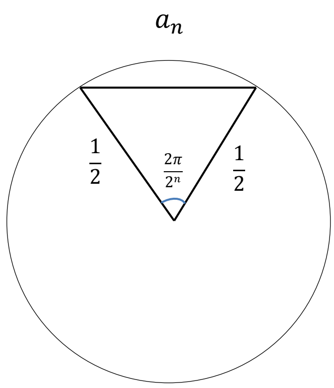
$b_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-b_n}$　となり、①を代入すると、

${a_{n+1}}^2 = \frac{1-\sqrt{1-{a_n}^2}}{2}$とあらわせる。

この漸化式を用いて計算することにより、πの近似値が正確に求まるはずである。

しかし、この方法では、漸化式が非常にややこしいので、計算が大変である。

そこで、近似計算を行う。関は、S_nの階差数列$S_{n+1}-S_n$に注目した。これをL_nとすると、L_nは公比が$\frac{1}{4}$の等比数列に近づいていく。その証明は以下のとおりである。



＜証明＞

図のように円に内接する正2^n角形の一辺の両端の角と円の中心を結び、三角形を作る。余弦定理から、

${a_n}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{2^n}$より、$a_n = \sin\frac{\pi}{2^n}$

$S_n = 2^n a_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}$

$L_n = \frac{2^{n+1}\sin x - 2^n \sin 2x}{2^n \sin 2x - 2^{n-1}\sin 4x}$　　（$\mathrm{x} = \frac{\pi}{2^{n+1}}$とおく）

これを整理すると、$\frac{1}{2\cos x(1+\cos x)}$　よって、$\lim_{n\to\infty} x = 0$より、$\frac{1}{4}$

∴ 公比は$\frac{1}{4}$に近づく。

さらに関は手計算により n＝15, 16…からはほぼ公比が$\frac{1}{4}$になっていることを見抜いた。したがってL_nはS_nの階差数列なので公式より、

$S_n = S_{16} + \sum_{k=16}^{n-1} L_k \fallingdotseq S_{16} + \frac{L_{16}(1-r^{n-2})}{1-r}$であるので、n→∞より$S_{16} + \frac{L_{16}}{1-r}$

また、r=$\frac{L_{16}}{L_{15}}$とおいて$S_{16} + \frac{L_{16}}{1-r}$に代入して整理すると、

$S_{16} + \frac{L_{15}L_{16}}{L_{15}-L_{16}}$となり、これがπを表す式である。

3. 関が求めた円周率の精度

Excel を使って実際の数値を出してみると、3.14159265358979323847128367513 となり、実際の数値と比較すると 19 桁まで正しい。

これは、式からも求めることができる。

$S_n = 2^n a_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}$ より、r=$\frac{1}{4}$、$\alpha_n = (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}$とおくと、

$S_n = \pi + \alpha_1 r^n + \alpha_2 r^{2n} + \cdots$になり、これを$S_{16} + \frac{L_{16}}{1-r}$より、$S_{16} + \frac{S_{17}-S_{16}}{1-r}$に代入すると、$S_\infty \fallingdotseq \pi - \alpha_2 r^{31} + \cdots$　よって、$S_\infty - \pi = -\alpha_2 r^{31} + \cdots = -5.529\ldots\times 10^{-19}$

より、証明できる。

4. 今後の課題

関孝和は 19 桁まで正しいのにもかかわらず 11 桁まで正しいと記している。なぜ関は 11 桁までしか採用しなかったのか、そこで関孝和が円周率を求めた理由について調べた。

江戸時代初期、暦が実際の季節とずれているため、各地域で暦が違っているという大きな問題があった。そのために統一的な暦を作ることが求められていた。関は暦を作るのに円周率が必要だったため、値を求めようとした。そこで暦を求めるに必要な円周率は 11 桁までよかったのではないか、と考えた。

しかし正確な検証はできなかった。引き続き調査していきたい。