

整数についての考察

1. はじめに

分割数というものに着目してみました。初めは分割数ということを知らずに研究していましたが、後々僕の研究は分割数という分野に関係し、また未解決問題の1つと知りました。以後僕の研究では定義として、 $f(n)$ について自然数 n を自然数の和（大きい順に並べるとする）で表し、その表し方の総数を $f(n)$ とおく。

例) $n = 4$ のとき

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 \quad \text{左記より } f(4) = 5$$

2. 研究結果

数えあげの方法は効率が悪くきりがないため、ほかの方法を考えました。

Excel を用い、

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
					最 低1 で分 割	最 低2 で分 割	最 低3 で分 割	最 低4 で分 割	最 低5 で分 割	最 低6 で分 割	1 : $f(n)$
$f(n)$					1	2	3	4	5	6	2 : 総数 (4~横の列の和)
$f(1)$	1			1							4 : n は n で分割できるので 1通りある
$f(2)$	2			1	1						5 : n を最低1で分割する総 数
$f(3)$	3			1	2						6 : n を最低2で分割する 総数
$f(4)$	5			1	3	1					7 : n を最低3で分割する 総数
$f(5)$	7			1	5	1					8 : n を最低4で分割する 総数
$f(6)$	11			1	7	2	1				9 : n を最低5で分割する 総数
$f(7)$	15			1	11	2	1				10 : n を最低6で分割す る総数
$f(8)$	22			1	15	4	1	1			
$f(9)$	30			1	22	4	2	1			
$f(10)$	42			1	30	7	2	1	1		
$f(11)$	56			1	42	8	3	1	1		
$f(12)$	77			1	56	12	4	2	1	1	

また、 n を最低1で分割の総数は $f(n-1)$

n を最低2で分割の総数は $(n-1)$ を最低1 - $(n-2)$ を最低1

n を最低3で分割の総数は $(n-1)$ を最低2 - $(n-3)$ を最低2

∴

n を最低 s で分割の総数は (n - 1) を最低 (s - 1) - (n - s) を最低 (s - 1) になっていることがわかりました。

また、1 2 を最低 3 = 9 を 3 以上 = 9 を 2 以上 - 7 を 2 以上 になっているので、
(n + m) を最低 m = n を m 以上 = n を (m - 1) 以上 - (n - m + 1) を (m - 1) 以上と表すことができ、

n を m 以上で分割することを g (n, m) とおくと、
g (n, m) = g (n, m - 1) - g (n - m + 1, m - 1) が成り立つことがわかる。

f (1 2) = 1 + (1 2 を最低 1 + 1 1 を最低 2 + …… + 6 を最低 6)
(n + m) を最低 m = n を m 以上より

f (1 2) = 1 + (1 1 を 1 以上 + 1 0 を 2 以上 + …… + 6 を 6 以上)
= 1 + g (1 1, 1) + g (1 0, 2) …… + g (6, 6)

$$f(n) = 1 + g(n - 1, 1) + g(n - 2, 2) + g(n - 3, 3) + \dots + g\{n - (m - 1), m - 1\}$$

$$f(n) = 1 + \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} g\{n - (m - 1), m - 1\}$$

m - 1 = k とおくと

$$f(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} g(n - k, k)$$

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ の [] はガウス記号を表しています。

n を m 以上で分割することを g (n, m) とし、m - 1 = k とおくことで、

$$f(n) = 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} g(n - k, k)$$

という式までまとめることができました。

3. まとめ

Excel を用いたことで f (2 5 0) = 2 3 0, 7 9 3, 5 5 4, 3 6 4, 6 8 1 という値も導くことができたので、課題としてもっと一般化に近づけるように深く掘り下げていきたい。